Leistungsanpassung mit Anpassgeräten

Ein funktechnisches Anpassgerät sorgt für eine möglichst verlustarme Abstrahlung elektromagnetischer Wellen über eine Antenne. Um die Funktion eines Anpassgeräts zu beschreiben, wurde nachstehend auf die theoretischen Grundlagen der Wechselstromtechnik zurückgegriffen, wie sie beispielsweise in

[1] *Lunze, K.*: Theorie der Wechselstromschaltungen, Lehrbuch. 2. Aufl. VEB Verlag Technik Berlin, 1977, und
[2] *Reusch; Hoschke; Scholz*: Lehrbuch elektrischer Systeme, Bd. 1, Verfahren zur Analyse und Beschreibung. VEB Verlag Technik Berlin, 1971,

dargestellt sind.

Ein Sender ist eine Zusammenschaltung mindestens einer realen Spannungs- oder Stromquelle und einer Vielzahl von realen Verbrauchern. Reale Quellen und Verbraucher besitzen ein nichtlineares Verhalten. Die U-I-Kennlinie einer nichtlinearen Quelle ist gekrümmt. Der Innenwiderstand der nichtlinearen Quelle ist abhängig von der Belastung. Die Verbraucher können die Eigenschaften eines ohmschen, kapazitiven oder induktiven Schaltelements aufweisen. Die Eigenschaften der nichtlinearen Verbraucher hängen von den Betriebsbedingungen, wie Temperatur, magnetische Induktion oder elektrische Feldstärke, ab. Die U-I-Kennlinie eines nichtlinearen Verbrauchers ist gekrümmt.

Für die Beschreibung der Funktion eines Anpassgeräts werden folgende vereinfachende Annahmen getroffen:

- Alle Quellen und Verbraucher befinden sich in einem Betriebszustand, in dem ein linearer U-I-Zusammenhang besteht, d.h., die Innenwiderstände der Quellen und die Widerstände der Schaltelemente der Verbraucher sind zeitlich konstant.
- Die Zusammenschaltung befindet sich in einem eingeschwungenen, quasistationären Zustand.

Ein typischer Amateurfunksender besteht aus den in Abbildung 1 (Anhang) dargestellten Blöcken. Wenn man die Zusammenschaltung der Blöcke an den Punkten A, B auftrennt, hält man zwei Schaltungsteile mit je zwei Anschlusspunkten. Den eine Quelle enthaltenden Schaltungsteil nennt man aktiven Zweipol. Der zweite Schaltungsteil, dem das Anpassgerät zugeordnet ist, enthält keine Quelle- er wird passiver Zweipol genannt. Die Auftrennung der Zusammenschaltung an den Punkten A, B ist zweckmäßig, weil Anpassgeräte häufig räumlich separat neben einem Sendegerät betrieben werden. Das den aktiven Zweipol verkörpernde Sendegerät liefert an einer i.d.R. koaxialen Ausgangsbuchse an den Klemmen A, B eine hochfrequente sinusförmige Wechselspannung mit einem definierten Innenwiderstand von z.B. 50 Ω.

Alle Elemente der Zweipole können zu Ersatzelementen zusammengefasst werden. Es ergibt sich ein aktiver Ersatzzweipol mit einer Urspannung $\underline{e}$ und einem Ersatzinnenwiderstand $\underline{Z}_i$ des Sendegeräts. Die Urspannung $\underline{e}$ und der Ersatzinnenwiderstand $\underline{Z}_i$ sind jeweils mit einem unterstrichenen Buchstaben als komplexe Größen gekennzeichnet. Die im passiven Zweipol vorhanden Widerstände des SWR-Indikators, des Anpassgeräts, der Antennenleitung und der Antenne zeigen eine Gesamtwirkung eines komplexen Ersatzarbeitswiderstands $\underline{Z}_a$. Das Anpassgerät enthält einstellbare Kapazitäten und/oder Induktivitäten und/oder Hochfrequenzübertrager mit einstellbarer magnetischer Kopplung, so dass $\underline{Z}a$ veränderlich ist. Zum Verändern von $\underline{Z}_a$ dienen Drehkondensatoren, Rollspulen oder Kugelvariometer hoher Güte. Ein gutes Anpassgerät hat geringe Eigenverluste und erlaubt eine große Veränderung von $\underline{Z}_a$.

Die komplexen Größen wurden eingeführt, um den Rechenaufwand zu mindern. Die komplexen Größen für den Strom $\underline{i}$ und die Spannungen $\underline{e}$, $\underline{u}$ können als mit konstanter Winkelgeschwindigkeit umlaufende Zeiger gesehen werden, deren Projektion in einem Koordinatensystem über die Zeit jeweils eine Sinusfunktion ergibt. Die Länge des Zeigers entspricht der Amplitude, die Winkelgeschwindigkeit der Frequenz und die Lage des Zeigers zu der Zeit t = 0 dem Nullphasenwinkel der Sinusfunktion. Die komplexen Größen für die Widerstände $\underline{Z}_i$ und $\underline{Z}_a$ sind dementsprechend ruhende Zeiger.

Legt man einen Zeiger $\underline{A}$ in eine Gaußsche Zahlenebene, dann ergibt sich ein Zeiger mit einer reellen Komponente A_1 und einer imaginären Komponente $\mathrm{j}A_2$:

$$\underline{A} = A_1 + \mathrm{j}A_2. \quad (1)$$

Nach dem Satz des Pythagoras ergibt sich der Betrag des Zeigers $\underline{A}$:

$$|\underline{A}| = A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}. \quad (2)$$

Besitzt $\underline{A}$ zur reellen Achse die Neigung α, dann ergeben sich durch Anwenden der Winkelfunktionen die Komponenten zu:

$$A_1 = |\underline{A}| \cos \alpha, \quad (3.1)$$

$$A_2 = |\underline{A}| \sin \alpha \quad (3.2)$$

(3.1, 3.2) eingesetzt in (1) führt zu:

$$\underline{A} = |\underline{A}| (\cos \alpha + \mathrm{j} \sin \alpha). \quad (4)$$

Gemäß der Eulerschen Formel gilt:

$$\cos \alpha + \mathrm{j} \sin \alpha = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha}, \quad (5)$$

so dass sich aus (4) ergibt:

$$\underline{A} = A_1 + \mathrm{j}A_2 = |\underline{A}| \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha}. \quad (6)$$

Die zu $\underline{A}$ konjugiert komplexe Größe $\underline{A}^*$ hat den gleichen Realteil und einen Imaginärteil mit entgegengesetztem Vorzeichen:

$$\underline{A}^* = A_1 - \mathrm{j}A_2 = |\underline{A}| \, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha}.$$

$\underline{A}^*$ ist zu $\underline{A}$ an der reellen Achse gespiegelt. Eine Multiplikation einer komplexen Größe mit ihrer konjugiert komplexen Größe ergibt eine reelle Größe:

$$\underline{A} \, \underline{A}^* = |\underline{A}| \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} \, |\underline{A}| \, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha} = A^2 \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\alpha-\alpha)} = A^2 \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(0)} = A^2 \, \mathrm{e}^0 = A^2. \quad (7)$$

Mit der komplexen Schreibweise können Sinusfunktionen vorteilhaft addiert, subtrahiert, integriert und differenziert werden. Multiplikation und Quotientenbildung sind im komplexen Bereich nicht gestattet.

Mit diesen mathematischen Grundlagen, kann man ausrechnen, wie mit einem Anpassgerät die Impedanz $\underline{Z}_a$ des passiven Zweipols eingestellt werden muss, so dass ausgehend vom aktiven Zweipol eine maximale Wirkleistung P_a zum passiven Zweipol übertragen wird. Die Wirkleistung P_a ist der Leistungsanteil, den der passive Zweipol im Mittel aufnimmt und an die Umgebung abgibt. Die Blindleistung Q_a ist der Anteil, der durch zeitweilige Energiespeicherung zwischen aktiven und passiven Zweipol hin- und herpendelt.

Die komplexe Scheinleistung $\underline{S}_a$ an $\underline{Z}_a$ ist wie folgt definiert:

$$\underline{S}_a = \underline{U}_a \underline{I}^*. \qquad (8)$$

$\underline{U}_a$, $\underline{I}^*$ sind komplexe Effektivwerte. In Exponentialform ergibt sich:

$$\underline{S}_a = \underline{U}_a \underline{I}^* = U_a e^{j\varphi_u} \; I e^{-j\varphi_i} = U_a I \; e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = U_a I \; e^{j\varphi} = S_a \; e^{j\varphi}.$$

Nach der Eulerschen Formel ($\cos\varphi + j\sin\varphi = e^{j\varphi}$) gilt:

$$\underline{S}_a = S_a \cos\varphi + jS_a \sin\varphi = U_a I \cos\varphi + jU_a I \sin\varphi = P_a + jQ_a.$$

Die interessierende Wirkleistung P_a entspricht dem Realteil von $\underline{S}_a$:

$$P_a = \mathrm{Re}(\underline{S}_a).$$

Weil nach dem Ohmschen Gesetz $\underline{U}_a = \underline{Z}_a \underline{I}$ gilt, wird aus (8):

$$\underline{S}_a = \underline{U}_a \underline{I}^* = I^2 \underline{Z}_a \qquad (9)$$

Die Impedanz $\underline{Z}_a$ wird definiert als:

$$\underline{Z}_a = \frac{\underline{u}_a}{\underline{i}} = \frac{\hat{U}_a e^{j(\omega t + \varphi_u)}}{\hat{I} e^{j(\omega t + \varphi_i)}} = \frac{\hat{U}_a e^{j\varphi_u}}{\hat{I} e^{j\varphi_i}} = \frac{\underline{\hat{U}}_a}{\underline{\hat{I}}} = \frac{\underline{U}_a}{\underline{I}} = \frac{U_a}{I} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = \frac{U_a}{I} e^{j\varphi}. \qquad (10)$$

Durch Herauskürzen vom $j\omega t$ ist $\underline{Z}_a$ eine zeitunabhängige Größe.

Nach der Eulerschen Formel ($U_a \cos\varphi + j\, U_a \sin\varphi = U_a e^{j\varphi}$) wird aus (10):

$$\underline{Z}_a = \frac{U_a \cos\varphi}{I} + j\, \frac{U_a \sin\varphi}{I} = R_a + jX_a\,. \qquad (11)$$

R_a ist der Ohmsche Widerstand (Resistanz). X_a bezeichnet man als Blindwiderstand (Reaktanz). Analoges gilt für $\underline{Z}_i$:

$$\underline{Z}_i = R_i + jX_i\,. \qquad (12)$$

Zusammengeschaltet bilden aktiver und passiver Zweipol einen Grundstromkreis. Der Grundstromkreis besteht aus einer Reihenschaltung der Urspannungsquelle $\underline{e}$ und der Widerstände $\underline{Z}_i$, $\underline{Z}_a$. Getrieben durch die Urspannung $\underline{e}$ fließt im Grundstromkreis ein Strom $\underline{I}$, *der* an den Widerständen $\underline{Z}_i$, $\underline{Z}_a$ die Spannungsabfälle $\underline{U}_i = \underline{I}\underline{Z}_i$ und $\underline{U}_a = \underline{I}\underline{Z}_a$ erzeugt. Nach dem 2. Kirchhoffschen Gesetz („Maschensatz“) ist die von der Spannungsquelle $\underline{E} = \underline{U}_l$ gelieferte Energie gleich der Summe der in den Widerständen $\underline{Z}_i$, $\underline{Z}_a$ umgesetzten Teilenergien. Es gilt: $\underline{U}_l = \underline{U}_i + \underline{U}_a$ oder:

$$\underline{U}_l = \underline{I}\underline{Z}_i + \underline{I}\underline{Z}_a = \underline{I}\,(\underline{Z}_i + \underline{Z}_a).$$

Damit folgt für den Strom im Grundstromkreis:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_l}{\underline{Z}_i + \underline{Z}_a} = \frac{\underline{U}_l}{R_i + R_a + j\,(X_i + X_a)} \qquad (13)$$

bzw. konjugiert komplex:

$$\underline{I}^* = \frac{\underline{U}_l^*}{R_i + R_a - j\,(X_i + X_a)} \;. \tag{14}$$

Weil $I^2 = \underline{I}\;\underline{I}^*$ gilt, wird aus (9) mit (11), (13), (14):

$$\underline{S}_a = I^2\;\underline{Z}_a = \underline{Z}_a\;\frac{\underline{U}_l\,\underline{U}_l^*}{[R_i + R_a + j\,(X_i + X_a)]\;[R_i + R_a - j\,(X_i + X_a)]} \;. \tag{15}$$

In Gleichung (15) stehen im Zähler und im Nenner des Bruches jeweils Produkte aus einer komplexen Größe und deren konjugiert komplexen Größe. Wenn in (15) für $\underline{Z}_a = R_a + jX_a$ eingesetzt und der Nenner ausmultipliziert wird ergibt sich:

$$\underline{S}_a = \frac{U_l^2\,(R_a + j\,X_a)}{(R_i + R_a)^2 - j(X_i + X_a)(R_i + R_a) + j(X_i + X_a)(R_i + R_a) - jj\,(X_i + X_a)^2},$$

wobei mit j*j = -1 folgt:

$$\underline{S}_a = \frac{U_l^2\,(R_a + j\,X_a)}{(R_i + R_a)^2 + (X_i + X_a)^2} = \frac{U_l^2\,R_a}{(R_i + R_a)^2 + (X_i + X_a)^2} + j\;\frac{U_l^2\,X_a}{(R_i + R_a)^2 + (X_i + X_a)^2} \;. \tag{16}$$

Aus (16) kann der Realteil direkt abgelesen werden:

$$P_a = \mathrm{Re}(\underline{S}_a) = \frac{U_l^2\,R_a}{(R_i + R_a)^2 + (X_i + X_a)^2} \;.$$

Wenn U_l^2 und R_i als konstant gegeben sind, ist P_a eine Funktion f von R_a und X_a:

$$P_a = \mathrm{f}(R_a, X_a) = U_l^2\;\frac{1}{\frac{1}{R_a}\,[(R_i + R_a)^2 + (X_i + X_a)^2]} \;. \tag{17}$$

P_a wird maximal, wenn der Nenner der Gleichung (17) minimal wird. Der zweite Summand in der eckigen Klammer verschwindet, wenn $X_a = -X_i$ ist. Aus (17) wird:

$$P_a = \mathrm{f}(R_a) = U_l^2\;\frac{1}{\frac{1}{R_a}\,(R_i + R_a)^2} = U_l^2\;\frac{R_a}{(R_i + R_a)^2} \;. \tag{18}$$

P_a wird maximal, wenn der Nenner der Gleichung (18) minimal wird. Das ist mit $R_i = R_a$ erfüllt:

$$P_{a,\mathrm{max}} = \mathrm{f}(R_i) = U_l^2\;\frac{R_i}{(R_i + R_i)^2} = U_l^2\;\frac{R_i}{(2R_i)^2} = \frac{U_l^2}{4R_i} \,. \tag{19}$$

Die vom aktiven Zweipol bereitgestellte Leistung ergibt sich aus:

$$P = U_l\;I = \frac{U_l^2}{R_i + R_a}. \tag{20}$$

Bei $R_i = R_a$ *wird:*

$$P_{max} = \mathrm{f}(R_i) = \frac{U_l^2}{R_i + R_i} = \frac{U_l^2}{2R_i}. \tag{21}$$

Der Wirkungsgrad η berechnet sich nach:

$$\eta = \frac{P_{a,max}}{P_{max}} = 0{,}5 \,.$$

D.h. selbst bei maximaler Leistungsabgabe des aktiven Zweipols ist der Wirkungsgrad nur 50 %.

Die maximale Wirkleistung $P_{a,max}$, die über $\underline{Z}_a$ an die Umgebung abgegeben wird, kann auch mit den Mitteln der Differentialrechnung bestimmt werden. Eine Funktion $P_a = f(R_a, X_a)$ besitzt dort ein Maximum, wo die 1. Ableitung eine Nullstelle hat:

$$\frac{\partial P_a}{\partial R_a} = 0 \qquad (22)$$

$$\frac{\partial P_a}{\partial X_a} = 0 \qquad (23)$$

$P_a = f(R_a, X_a)$ ist ein Produkt aus einer Konstanten U_l^2 und einer Funktion $u(x)$. Nach der Konstantenregel gilt:

$$f(x) = c * u(x) \Rightarrow f'(x) = c * u'(x)$$

Die Ableitung $f'(x)$ ist Null, wenn $u'(x) = 0$ ist. $u(x)$ ist ein Bruch mit einer Funktion $v(x) = 1$ im Zähler und einer Funktion
$w(x) = \frac{1}{R_a}\left[(R_i + R_a)^2 + (X_i + X_a)^2\right]$
im Nenner. Hier gilt die Quotientenregel:

$$u(x) = \frac{v(x)}{w(x)} \Rightarrow u'(x) = \frac{v'(x) * w(x) - v(x) * w'(x)}{(w(x))^2}$$

Weil $v(x) = 1$ wird:

$$u'(x) = \frac{0 * w(x) - 1 * w'(x)}{(w(x))^2} = -\frac{w'(x)}{(w(x))^2} = 0$$

Die Ableitung $u'(x)$ ist Null, wenn der Zähler $w'(x) = 0$ ist:

$$\frac{\partial}{\partial R_a}\left\{\frac{1}{R_a}\left[(R_i + R_a)^2 + (X_i + X_a)^2\right]\right\} = 0 \qquad (24)$$

$$\frac{\partial}{\partial X_a}\left\{\frac{1}{R_a}\left[(R_i + R_a)^2 + (X_i + X_a)^2\right]\right\} = 0 \qquad (25)$$

Um diese Ableitungen (24) und (25) zu bilden, kann man die Produktregel anwenden:

$$w(x) = s(x) * t(x) \Rightarrow w'(x) = s'(x) * t(x) + s(x) * t'(x)$$

Mit $s(x) = 1/R_a$ und $t(x)$ als der Faktor in der eckigen Klammer wird aus (24):

$$\frac{\partial}{\partial R_a}\left\{\frac{1}{R_a}\left[(R_i + R_a)^2 + (X_i + X_a)^2\right]\right\} =$$

$$-\frac{1}{{R_a}^2} * \left[{R_i}^2 + 2R_iR_a + {R_a}^2 + (X_i + X_a)^2\right] + \frac{1}{R_a} * 2(R_i + R_a) =$$

$$-\frac{{R_i}^2}{{R_a}^2} - \frac{2R_i}{R_a} - 1 - \frac{(X_i + X_a)^2}{{R_a}^2} + \frac{2R_i}{R_a} + 2 =$$

$$1 - \frac{{R_i}^2}{{R_a}^2} - \frac{(X_i + X_a)^2}{{R_a}^2} = 0 \qquad (26)$$

Die Produktregel auf (25) angewendet führt zu:

$$\frac{\partial}{\partial X_a}\left\{\frac{1}{R_a}\left[(R_i+R_a)^2+(X_i+X_a)^2\right]\right\}=$$

$$0*\left[(R_i+R_a)^2+(X_i+X_a)^2\right]+\frac{1}{R_a}*2(X_i+X_a)=$$

$$\frac{1}{R_a}*2(X_i+X_a)=0 \qquad (27)$$

Aus (27) folgt: $X_a=-X_i$. Das bedeutet, dass bei Leistungsanpassung die Blindwiderstände X_a, X_i gleiche Beträge aber entgegengesetztes Vorzeichen aufweisen müssen, so dass sie sich gegenseitig aufheben. Wirkt z.B. der Innenwiderstand induktiv, dann muss der Blindwiderstand X_a kapazitiv wirken. Wenn in (26) $X_a=-X_i$ gesetzt wird, ergibt sich:

$$1-\frac{{R_i}^2}{{R_a}^2}-\frac{(X_i+X_a)^2}{{R_a}^2}=1-\frac{{R_i}^2}{{R_a}^2}-\frac{(X_i-X_i)^2}{{R_a}^2}=1-\frac{{R_i}^2}{{R_a}^2}-\frac{(0)^2}{{R_a}^2}=1-\frac{{R_i}^2}{{R_a}^2}=0 \text{ oder}$$

$$1=\frac{{R_i}^2}{{R_a}^2} \text{ oder } {R_a}^2={R_i}^2 \text{ oder } R_a=R_i.$$

Um grafisch darzustellen, bei welchem Widerstandsverhältnis $x=R_a/R_i$ die maximale Leistung $P_{a,max}$ an R_a abgegeben wird kann Gl. (18) wie folgt umgeformt werden:

$$P_a = U_l^2\,\frac{R_a}{(R_i+R_a)^2}$$

Für R_a wird $x*R_i$ eingesetzt und umgeformt:

$$P_a=\frac{U_l^2xR_i}{(R_i+xR_i)^2}=\frac{U_l^2xR_i}{{R_i}^2+2x{R_i}^2+x^2{R_i}^2}=\frac{U_l^2xR_i}{xR_i\left(\frac{R_i}{x}+2R_i+xR_i\right)}=\frac{U_l^2}{\left(\frac{R_i}{x}+2R_i+xR_i\right)}=\frac{U_l^2}{R_i\left(\frac{1}{x}+2+x\right)}$$
$$=\frac{U_l^2*x}{R_i\left(\frac{1}{x}+2+x\right)*x}=\frac{U_l^2*x}{R_i(1+2x+x^2)}=\frac{U_l^2*x}{R_i(x+1)^2}=\frac{U_l^2}{4R_i}*\frac{4x}{(x+1)^2}$$

Weil $U_l^2/4R_i$ nach Gl. (19) $P_{a,max}$ entspricht, folgt:

$$f_1(x)=\frac{P_a}{P_{a,max}}=\frac{4x}{(x+1)^2}$$

Die Leistung P_i am Innenwiderstand R_i der Spannungsquelle U_l errechnet sich nach:

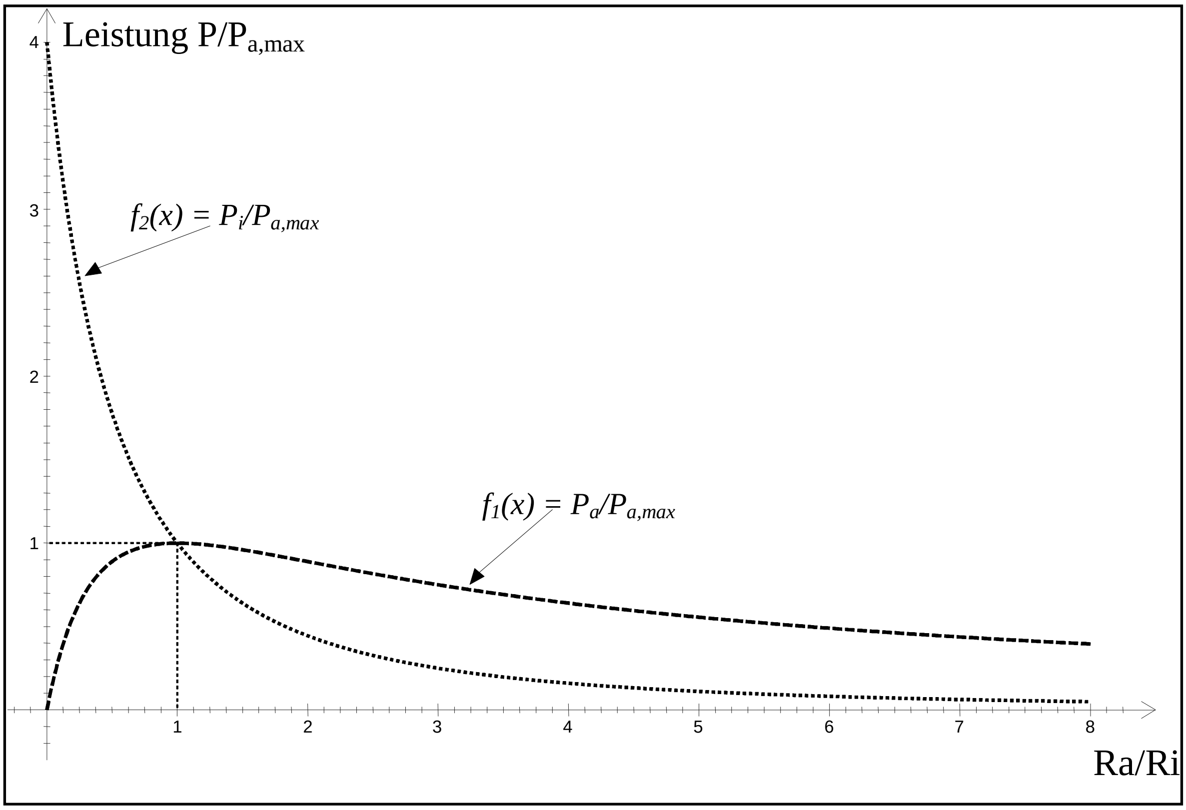
$$P_i=U_l^2\,\frac{R_i}{(R_i+R_a)^2}$$

Für R_a wird $x*R_i$ eingesetzt und umgeformt:

$$P_i=\frac{U_l^2R_i}{(R_i+xR_i)^2}=\frac{U_l^2R_i}{{R_i}^2+2x{R_i}^2+x^2{R_i}^2}=\frac{U_l^2R_i}{R_i(R_i+2xR_i+x^2R_i)}=\frac{U_l^2}{(R_i+2xR_i+x^2R_i)}=\frac{U_l^2}{R_i(1+2x+x^2)}=$$
$$=\frac{U_l^2}{R_i(x+1)^2}=\frac{U_l^2}{4R_i}*\frac{4}{(x+1)^2}$$

Weil $U_l^2/4R_i$ nach Gl. (19) $P_{a,max}$ entspricht, folgt:

$$f_2(x)=\frac{P_i}{P_{a,max}}=\frac{4}{(x+1)^2}$$


Leistung P/Pa,max
f2(x) = Pi/Pa,max
f1(x) = Pa/Pa,max
Ra/Ri
1
2
3
4
5
6
7
8

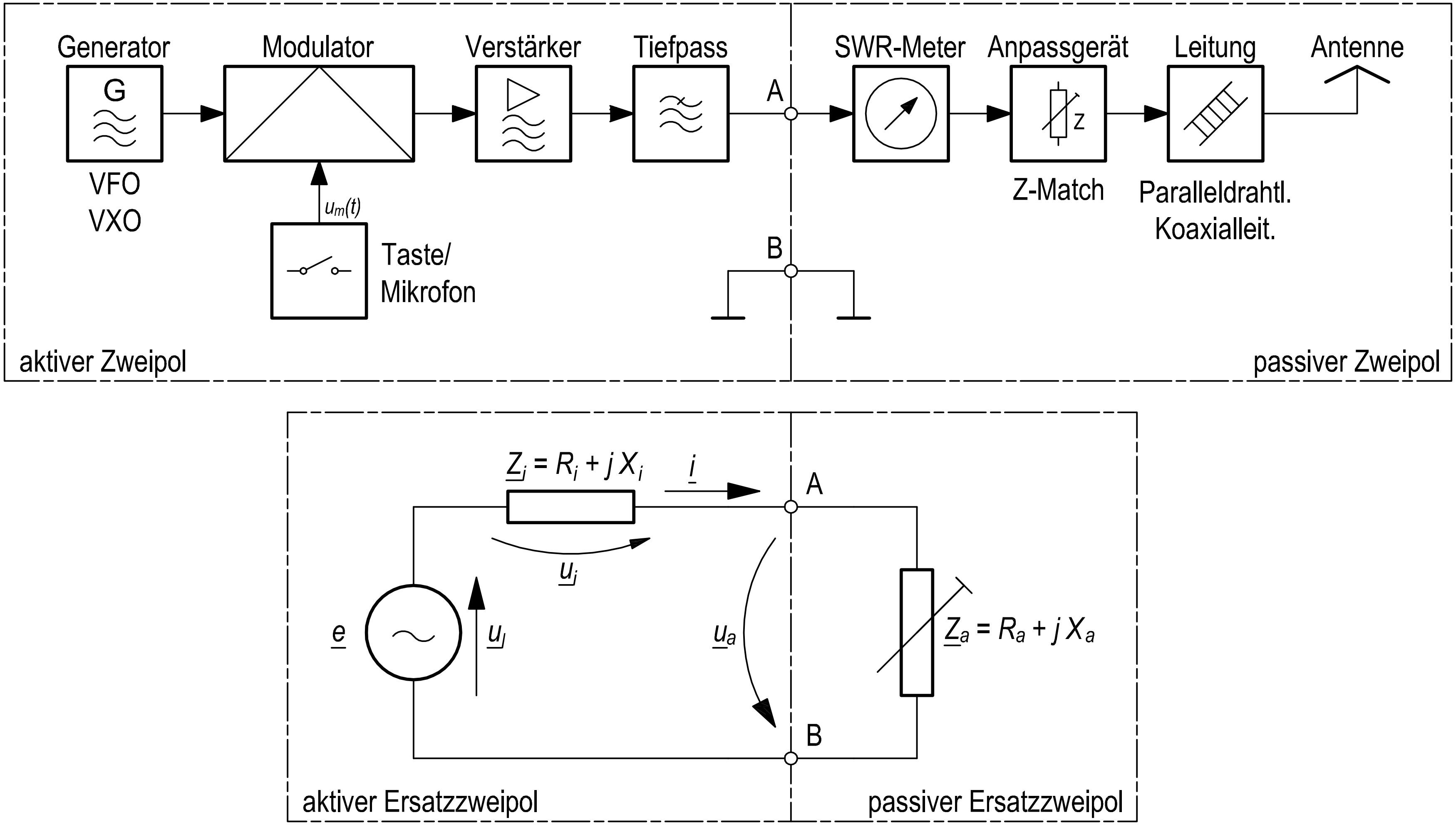


Abb. 1: Auftrennen einer Sendeanlage in zwei Zweipole und Aufstellen von Ersatzzweipolen

www.RolandPudimat.de