Arbeitsblatt Mathematik: Bewegungsaufgaben

Bewegungsaufgaben enthalten Angaben zu mindestens einem Objekt, das entlang einer Bahn bewegt wird bzw. sich entlang einer Bahn bewegt. Objekte in Bewegungsaufgaben sind z.B. Fahrzeuge, Gegenstände, Wind, Wasser, Personen, Lebewesen. Eine Bewegung des Objektes ist durch Angaben, wie Bahnverlauf, Richtung, Geschwindigkeit und Beschleunigung, beschrieben. Ist die Geschwindigkeit des Objekts konstant, so handelt es sich um eine gleichförmige Bewegung. Ändert sich die Geschwindigkeit, dann handelt es sich um eine ungleichförmige Bewegung, wobei das Objekt beschleunigt oder gebremst wird. Bewegungen von Objekten können gleichzeitig oder zeitlich zueinander versetzt in gleicher oder in entgegengesetzten Richtungen ablaufen. Eine Bewegung kann fortschreitend entlang einer Geraden und/oder auf einer Kreisbahn stattfinden.

Wenn in einer Aufgabenstellung nicht anders angegeben, dürft ihr annehmen, dass die Bewegung der Objekte gleichförmig ist, d.h. mit gleich bleibender Geschwindigkeit erfolgt. Weil bei einer gleichförmigen Bewegung die pro Zeiteinheit zurückgelegte Strecke konstant ist, ergibt eine grafische Darstellung des Weges s über der Zeit t in einem kartesischen Koordinatensystem eine Gerade:

$s(t)= v*t + s_0$.

Die Geschwindigkeit v ist der Anstieg der Geraden. s_0 ist der Ort des Objektes zu einem Startzeitpunkt t=0.

Zum Lösen einer Bewegungsaufgabe kann zu jedem Objekt die Bewegungsgleichung angegeben und in einem Koordinatensystem grafisch dargestellt werden. Die grafische Darstellung in dem Koordinatensystem und eventuell eine Skizze mit den Objekten und deren Bewegungen sind hilfreich beim Verstehen der Aufgabe. In den Gleichungen sind Unbekannte enthalten, die durch Lösen der Gleichungen gefunden werden.

Beispielaufgabe 1:

Die Radfahrer einer Radrennmannschaft fahren zusammen von einem Trainingslager ausgehend entlang einer Straße mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 40 km/h. Ein Trainer folgt 72 Minuten später den Fahrern in einem Materialwagen. Der Materialwagen fährt auf der gleichen Straße mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 100 km/h. Wie lange braucht der Trainer, um seine Mannschaft einzuholen? Wie weit haben sich die Fahrer vom Trainingslager entfernt, wenn der Trainer die Fahrer eingeholt hat?

Lösung:

Die Radfahrer verlassen zum Zeitpunkt t=0 das Trainingslager am Ort s=0 mit einer konstanten Geschwindigkeit v_1=40 km/h. Eine Darstellung des Ortes s abhängig von der Zeit ergibt in einem Koordinatensystem (Abb. 1) eine im Punkt $P_0(0;0)$ beginnende Gerade mit dem Anstieg v_1. Weil v_1 in km/h angegeben ist, wird die Zeit t ebenfalls in Stunden angetragen. Die Funktionsgleichung für die gleichförmige Bewegung der Fahrer lautet:

$$s = f_1(t) = v_1*t = 40t. \qquad (1.1)$$

Die Bewegung des Materialwagens ist ebenfalls gleichförmig nach einer Geraden $f_2(t)$. Die Gerade $f_2(t)$ enthält den Punkt $P_2(1,2;0)$ und steigt mit v_1=100 km/h. Der Punkt P_2 ergibt sich aus der Startkoordinate des Materialwagens: 72 min = 1,2 h. Weil der Materialwagen schneller als die Mannschaft fährt, ist $f_2(t)$ steiler als $f_1(t)$.

$$s = f_2(t) = v_2*t = 100t + s_0 \qquad (2.1)$$

Zu einem Zeitpunkt t_1 hat der Trainer die Fahrer eingeholt. Die Fahrer und der Trainer haben beide eine Strecke s_1 zurückgelegt. In dem Koordinatensystem schneiden sich die Geraden $f_1(t)$ und $f_2(t)$ im Punkt $P_1(t_1;s_1)$. Zum Zeitpunkt t_1 haben $f_1(t)$ und $f_2(t)$ den gleichen Ordinatenwert s_1:

$$f_1(t_1) = f_2(t_1) = s_1.$$

Um t_1 und s_1 zu finden wird $f_1(t)$und $f_2(t)$ zum Zeitpunkt t_1 bestimmt:

$$f_1(t_1):\ s_1 = 40t_1 \qquad (1.2)$$
$$f_2(t_1):\ s_1 = 100t_1 + s_0 \qquad (2.2)$$

s_0 ist der Schnittpunkt der Geraden $f_2(t)$ mit der vertikalen Weg-Achse. Wenn ein Punkt $P_2(t_2;s_2) = P_2(1,2;0)$ und der Anstieg v_2 der Geraden $f_2(t)$ bekannt sind, kann s_0 wie folgt berechnet werden:

$s_0 = s_2 – v_2 * t_2$ oder

$$s_0 = 0 – 100*t_2 = -100 * 1,2 = -120.$$

Die Gleichung (2.2) lautet dann:

$$s_1 = 100t_1 -120.$$

Durch Gleichsetzen von (1.2) und (2.2) folgt:

$40t_1 = 100t1 -120$, woraus sich

$t_1 = 2$ ergibt.

In der Aufgabenstellung ist die Zeitspanne gesucht, die von t_2 bis t_1 vergeht:

$t_1 - t_2 = 2 - 1{,}2 = 0{,}8.$

Der Trainer hat die Fahrer nach 0,8 Stunden bzw. 48 Minuten eingeholt.

Zum Zeitpunkt $t_1 = 2$ haben die Fahrer die Strecke s_1 zurückgelegt:

$f_1(t_1) = 40 * t_1 = 40 * 2 = 80.$

Die Fahrer haben sich zum Zeitpunkt ($t_1 = 2$) des Einholens durch den Wagen 80 km vom Lager entfernt.

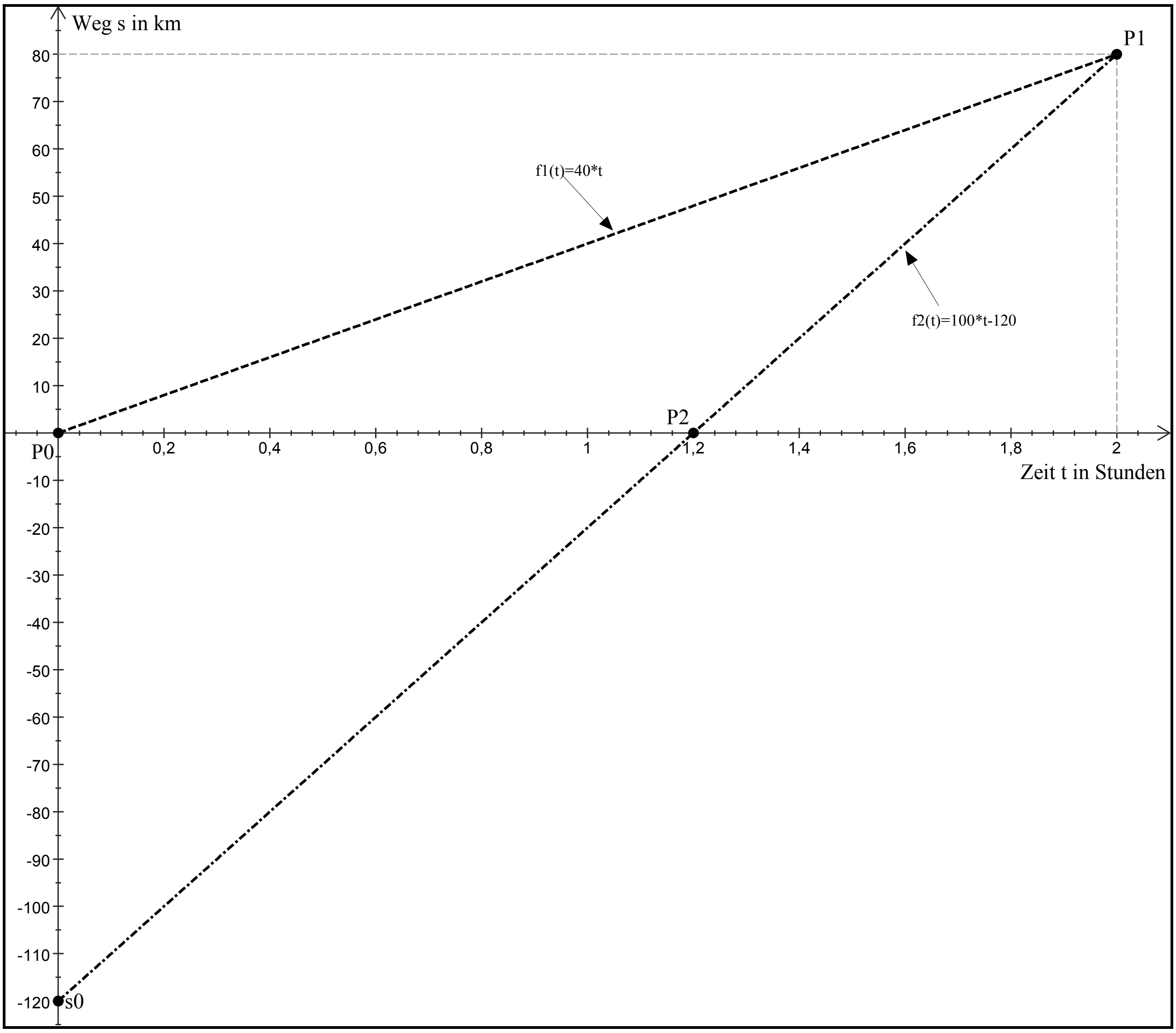


Abb. 1

Beispielaufgabe 2:

Ein Schiff fährt bei voller Fahrt voraus in einem ruhenden Gewässer mit einer bestimmten Eigengeschwindigkeit. Bei konstanter Fließgeschwindigkeit des Flusswassers eines Flusses kommt das Schiff bei voller Fahrt flussabwärts mit 27 km/h und flussaufwärts nur mit 11 km/h voran. Wie hoch sind die Fließgeschwindigkeit des Flusswassers und die Eigengeschwindigkeit des Schiffes?

Lösung:

Im Sachgebiet der Mechanik habt ihr bereits im Physikunterricht gelernt, dass die Geschwindigkeit eine gerichtete Größe ist, die durch einen Betrag und eine Richtung gekennzeichnet ist. Mathematisch ausgedrückt ist die Geschwindigkeit ein Vektor. Vektoren können einfach addiert oder voneinander subtrahiert werden, wenn sie in die gleiche oder die entgegengesetzte Richtung weisen.

Flussabwärts, also mit dem Strom, ergibt sich eine Geschwindigkeit v_1 = 27 km/h aus einer Addition der Eigengeschwindigkeit v_E des Schiffes und der Fließgeschwindigkeit v_F des Flusses was in Vektorendarstellung so aussieht:

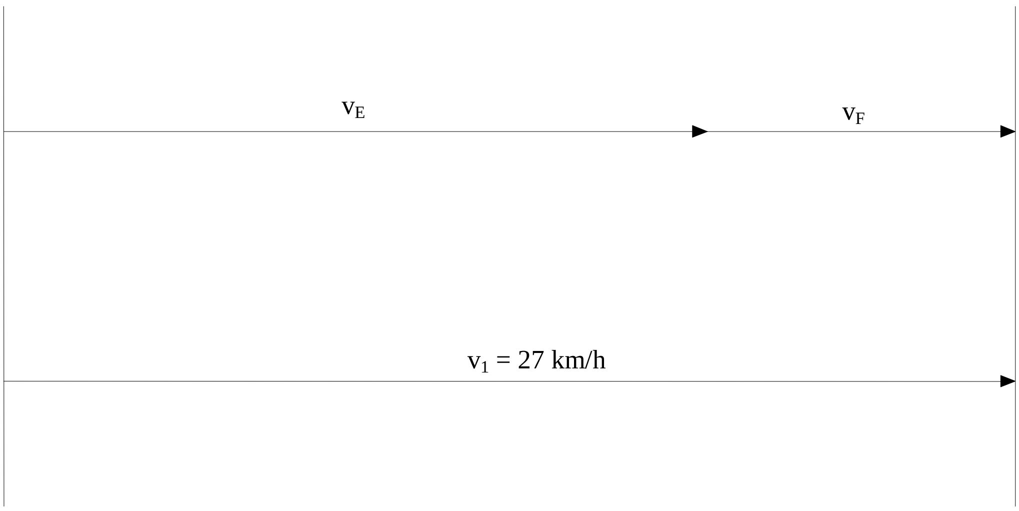


Abb. 2

Flussaufwärts, also gegen den Strom, ergibt sich eine Geschwindigkeit v_2 = 11 km/h aus einer Subtraktion der Eigengeschwindigkeit v_E des Schiffes und der Fließgeschwindigkeit v_F des Flusses was in Vektorendarstellung so aussieht:

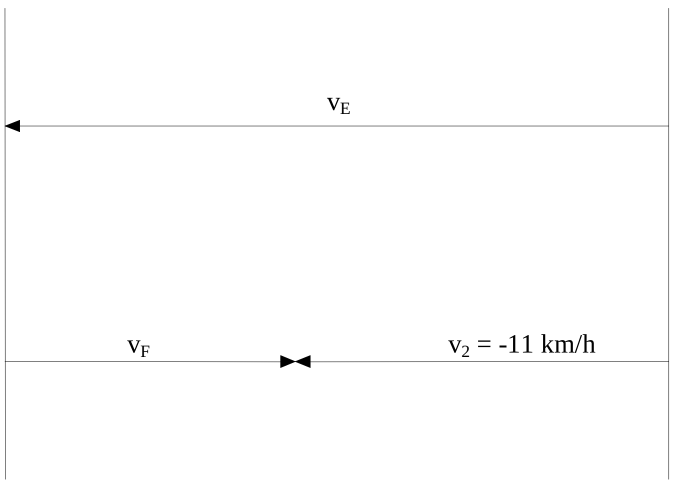


Abb. 3

Die Bewegungsgleichungen $f_1(t)$ und $f_2(t)$ des Schiffes flussabwärts und flussaufwärts lauten:

$f_1(t) = v_1 * t = (v_E + v_F) * t = 27 * t$
$f_2(t) = v_2 * t = (-v_E + v_F) * t = -11 * t.$

Flussabwärts haben die Geschwindigkeiten v_E und v_F des Schiffes und des Flusses die gleichen Richtungen, so dass sie in $f_1(t)$ jeweils mit positivem Vorzeichen angegeben sind. Flussaufwärts haben die Geschwindigkeiten v_E und v_F des Schiffes und des Flusses entgegengesetzte Richtungen, so dass v_E in $f_2(t)$ mit negativem Vorzeichen angegeben ist. In $f_2(t)$ behält v_F das positive Vorzeichen, weil ja die Fließrichtung des Flusses nicht verändert ist. Gemäß Aufgabenstellung kommt das Schiff flussaufwärts mit 11 km/h voran. D.h. das Schiff hat flussaufwärts betragsmäßig eine größere Geschwindigkeit v_E als der Fluss: $v_E > v_F$. Die flussaufwärts resultierende Geschwindigkeit $v_2 = (-v_E) + v_F = -11$ km/h hat in $f_2(t)$ ein negatives Vorzeichen, weil sie v_1 entgegen gerichtet ist.

Aus den Bewegungsgleichungen ergeben sich zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten:

$v_E + v_F = 27$ (1)
$-v_E + v_F = -11$ (2)

(1) + (2):

$2 * v_F = 27 +(-11) = 16$ bzw. $v_F = 8$.

Eingesetzt in (1):

$v_E + 8 = 27$ bzw. $v_E = 19$.

Die Eigengeschwindigkeit des Schiffes beträgt 19 km/h. Die Fließgeschwindigkeit des Flusses beträgt 8 km/h.

Abb. 4 zeigt eine grafische Darstellung der Bewegungen des Schiffes in einem ruhenden Gewässer [$f_4(t)$, $f_5(t)$] und auf dem Fluss [$f_1(t)$, $f_2(t)$]. $f_3(t)$ zeigt die Bewegung eines auf dem Fluss antriebslos treibenden Objektes mit der Fließgeschwindigkeit 8 km/h.

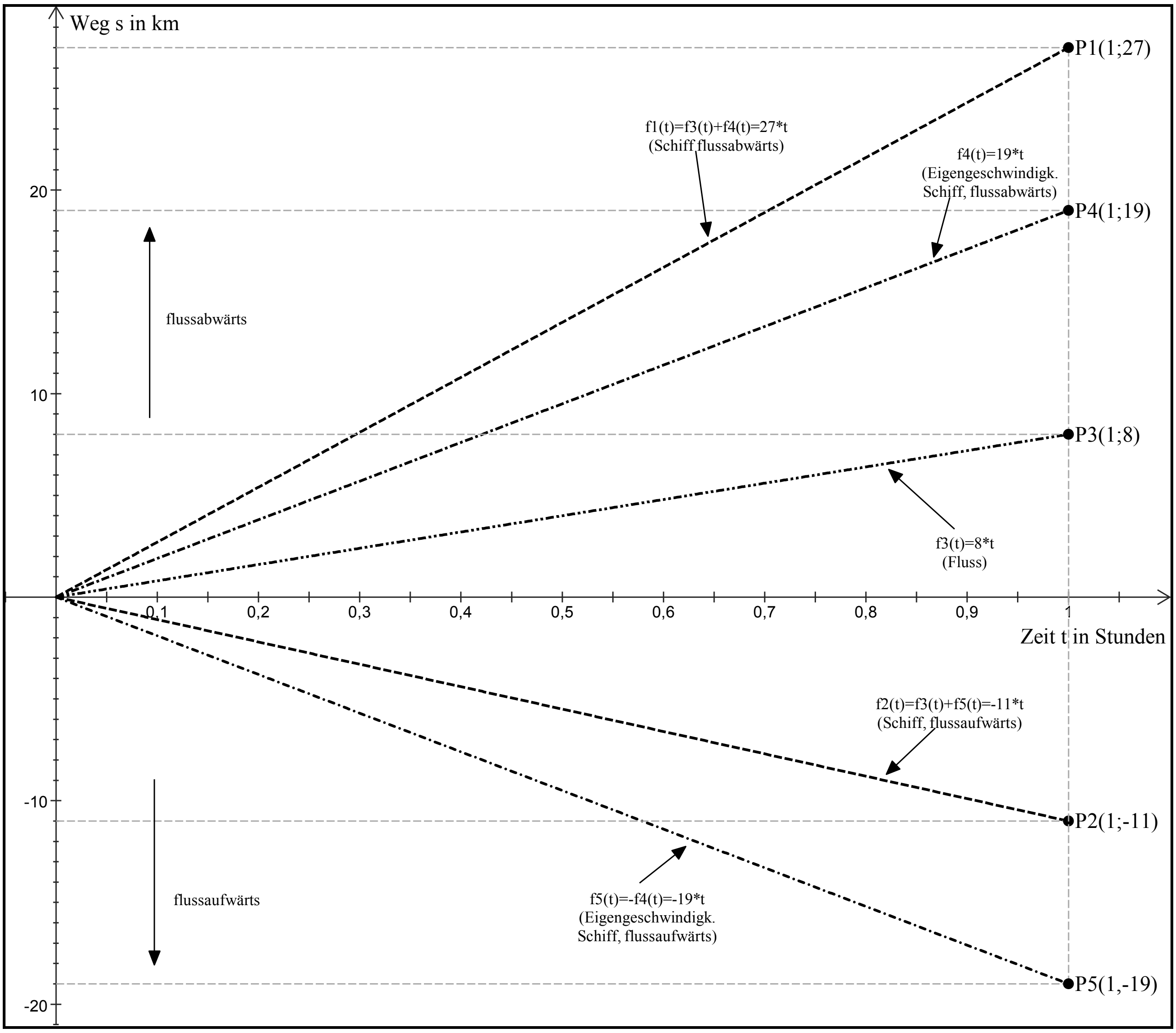

Weg s in km
P1(1;27)
f1(t)=f3(t)+f4(t)=27*t
(Schiff flussabwärts)
f4(t)=19*t
(Eigengeschwindigk.
Schiff, flussabwärts)
P4(1;19)
20
flussabwärts
10
P3(1;8)
f3(t)=8*t
(Fluss)
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1
Zeit t in Stunden
f2(t)=f3(t)+f5(t)=-11*t
(Schiff, flussaufwärts)
-10
P2(1;-11)
flussaufwärts
f5(t)=-f4(t)=-19*t
(Eigengeschwindigk.
Schiff, flussaufwärts)
P5(1,-19)
-20

Abb. 4

Beispielaufgabe 3:

Die Signalanlagen einer Zugstrecke von A-Stadt nach B-Stadt sollen erneuert werden, so dass nach Abschluss der Bauarbeiten die Reisezeit verkürzt werden kann. Während der Bauarbeiten fährt der Schnellzug 40 km/h langsamer als die fahrplanmäßige Geschwindigkeit, so dass er 70 Minuten später in B-Stadt ankommt. Nach den Bauarbeiten gibt es eine Fahrplanänderung, so dass der Schnellzug 40 km/h schneller voran kommt als vor der Fahrplanänderung und 35 Minuten früher in B-Stadt ankommt als vor den Bauarbeiten. Wie schnell fuhr der Zug entsprechend dem Fahrplan vor der Streckenerneuerung? Wie weit ist B-Stadt von A-Stadt entfernt?

Lösung:

Beim Lösen der Aufgabe beachten wir, dass die Geschwindigkeit in km/h und die Zeit in Minuten angegeben ist. Weil km/h für einen Zug eine übliche Geschwindigkeitsangabe darstellt, scheint es zweckmäßig, die Zeit in Stunden auszudrücken:

70 min = 70/60 h und 35 min = 35/60 h.

Vor der Streckenerneuerung befuhr der Zug die Strecke s_F zwischen A-Stadt und B-Stadt mit einer konstanten Geschwindigkeit v_F. Fahrplanmäßig benötigte der Zug die Zeit t_F. Die Bewegungsgleichung entsprechend dem fahrplanmäßigen Betrieb lautet:

$s = f_1(t) = v_F * t.$ (1.1)
Zum Zeitpunkt t_F erreicht hat der Zug die Strecke s_F zurückgelegt:
$s_F = f_1(t_F) = v_F * t_F$ (1.2)

Während der Bauarbeiten fährt der Zug langsamer mit der Geschwindigkeit $v_F - 40$:
$s = f_2(t) = (v_F - 40) * t.$ (2.1)
Durch die Langsamfahrt hat der Zug die Strecke s_F erst nach $t_F + 70/60$ bewältigt:
$s_F = f_2(t_F+70/60) = (v_F - 40)* (t_F + 70/60).$ (2.2)

Nach den Bauarbeiten fährt der Zug schneller mit der Geschwindigkeit $v_F + 40$:
$s = f_3(t) = (v_F + 40) * t.$ (3.1)
Durch die schnellere Fahrt hat der Zug die Strecke s_F bereits nach $t_F - 35/60$ abgefahren:
$s_F = f_3(t_F-35/60) = (v_F + 40)* (t_F - 35/60).$ (3.2)

Die drei Gleichungen (1.2), (2.2), (3.2) enthalten die drei Unbekannten s_F, v_F, t_F. Zum Lösen der Gleichungen wird in (2.2) und (3.2) entsprechend (1.2) für $s_F = v_F * t_F$ eingesetzt. Die Klammerausdrücke auf den rechten Seiten von 2.2 und 3.2 werden ausmultipliziert:

$v_F t_F = v_F t_F + (70/60)v_F - 40t_F - 2800/60.$ (2.3)
$v_F t_F = v_F t_F - (35/60)v_F + 40t_F - 1400/60.$ (3.3)

Die Gleichungen (2.3) und (3.3) werden so umgestellt, dass links die Variablen und rechts die Konstanten stehen:

$-(70/60)v_F + 40t_F = -2800/60$ (2.4)
$(35/60)v_F - 40t_F = -1400/60$ (3.4)

Um die Bruchzahlen wegzubekommen werden (2.4) und (3.4) mit 60 multipliziert:

$-70v_F + 2400t_F = -2800$ (2.5)
$35v_F - 2400t_F = -1400$ (3.5)

Weil in (2.5) und (3.5) die Koeffizienten vor t_F betragsmäßig 2400 sind, verschwindet t_F nach Addition beider Gleichungen:

$(-70+35)v_F = -2800- 1400$ oder
$-35v_F = -4200$ oder
$v_F = 4200/35 = 120$.

Vor der Streckenerneuerung fuhr der Zug fahrplanmäßig mit einer Geschwindigkeit von 120 km/h.

Aus (2.5) folgt:

$2400t_F = -2800 + 70v_F = -2800 + 70 * 120 = -2800 + 8400 = 5600$, oder

$t_F = 5600/2400 = 7/3$.

v_F und t_F in (1.2) eingesetzt ergibt:

$s_F = v_F * t_F = 120$ km/h* 7/3 h = 280 km.

B-Stadt liegt von A-Stadt 280 km entfernt. Der Zug fuhr fahrplanmäßig von A-Stadt nach B-Stadt 7/3 h bzw. 140 min.

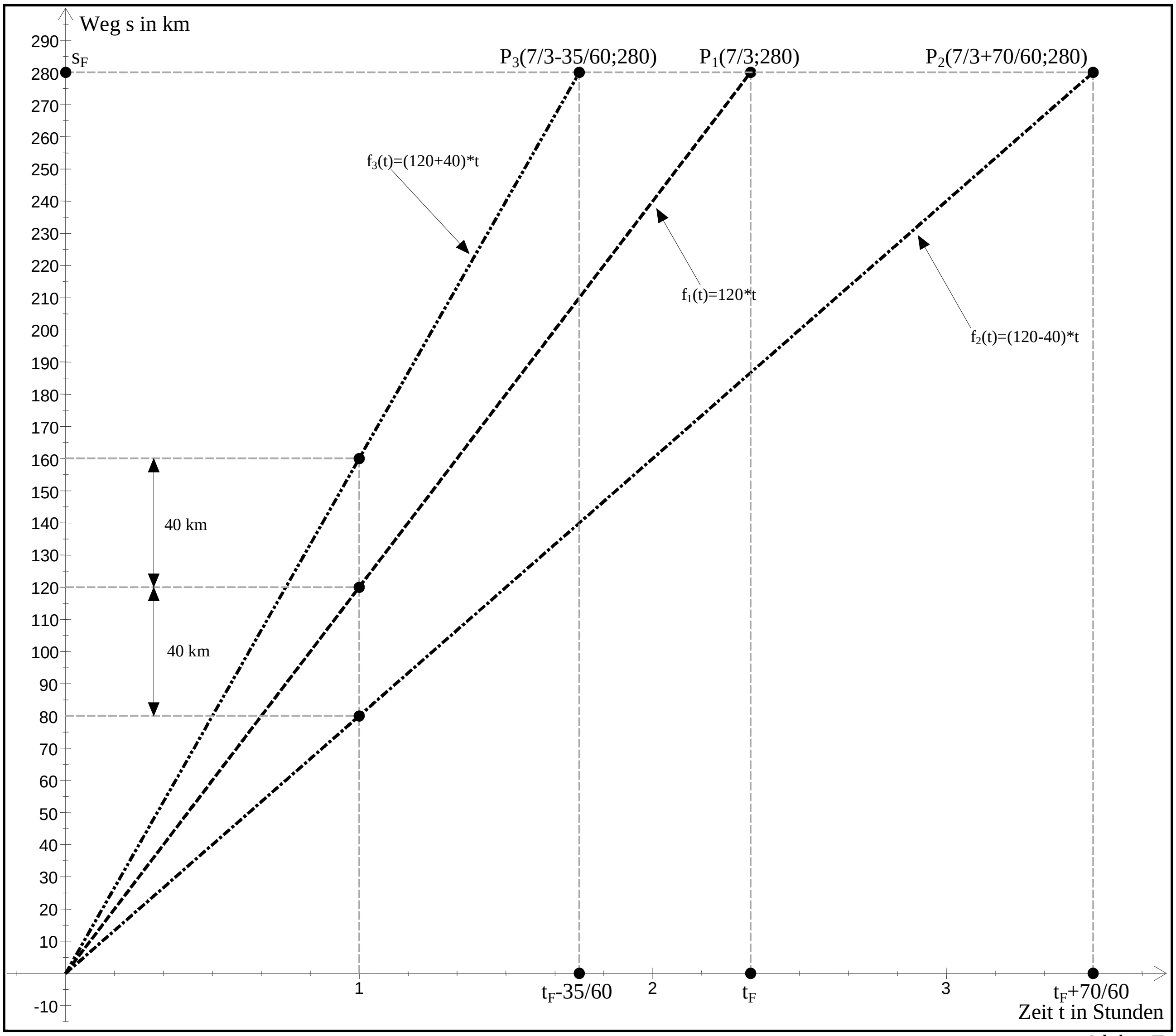


Abb. 5

Beispielaufgabe 4:

Zur Vorbereitung auf einen Marathonlauf trainieren zwei Läufer auf einer 400m-Bahn. Die Läufer laufen unterschiedlich schnell jeweils mit konstanter Geschwindigkeit. Laufen die Läufer in gleicher Umlaufrichtung, dann treffen sie sich alle 200 Sekunden. Laufen die Läufer in entgegengesetzten Richtungen, dann treffen sie sich alle 50 Sekunden. Mit welchen Geschwindigkeiten laufen die Läufer?

Lösung:

Laufen die Läufer in gleicher Richtung, dann überholt der schnellere den langsameren Läufer. Zum Zeitpunkt des Überholens ist der schnellere Läufer 400 m voraus.
Laufen die Läufer in entgegengesetzter Richtung, dann hat der schnellere Läufer zum Zeitpunkt des erstmaligen Treffens von den 400 m eine größere Strecke zurückgelegt als der langsamere Läufer. Der schnellere und der langsamere Läufer haben beim erstmaligen Treffen zusammen 400m zurückgelegt.

Wenn beide Läufer zum Zeitpunkt t=0 vom Startpunkt s=0 in die gleiche Richtung loslaufen, dann kann die Bewegung der Läufer mit folgenden Gleichungen beschrieben werden:

$f_1(t) = v_1 * t$
$f_2(t) = v_2 * t.$

Nach 200 s ist der schnellere Läufer 400m voraus, d.h., bei t =200 s ist $f_1(t)$ um 400 größer als $f_2(t)$, wenn der schnellere Läufer mit der Geschwindigkeit v_1 und der langsamere mit der Geschwindigkeit v_2 unterwegs ist. Oder anders ausgedrückt, haben die Läufer nach 200 s eine Wegdifferenz von 400 m. Es gilt:

$f_1(200) - f_2(200) = 400$ oder
$200v_1 - 200v_2 = 400$ (1.1).

Wenn beide Läufer zum Zeitpunkt t=0 vom Startpunkt s=0 in entgegengesetzte Richtungen loslaufen, dann kann die Bewegung der Läufer mit folgenden Gleichungen beschrieben werden:

$f_1(t) = v_1 * t$
$f_3(t) = -f_2(t) = -v_2 * t.$

$f_3(t)$ ist das an der t-Achse gespiegelte Bild von $f_2(t)$. Das Minuszeichen vor v_2 gibt an, dass der langsamere in entgegengesetzter Richtung zum schnelleren Läufer läuft. $f_3(t)$ ist eine Gerade, die, wie aus Abb. 6 hervorgeht, ihren Ursprung im Startpunkt $P_0(0;0)$ hat und nach rechts unten verläuft.
Nach 50 s haben beide Läufer in Summe 400 m zurückgelegt, d.h. bei t = 50 s gilt:

$f_1(50) + |f_3(50)| = 400$ oder
$50v_1 + 50v_2 = 400$ (2.1).

Weil $f_3(50)$ negativ ist, wurde in (2.1) nur der Betrag von $f_3(50)$ verwendet.
Wenn ihr (1.1) durch 200 und (2.1) durch 50 dividiert, erhaltet ihr 2 Gleichungen mit nur 2 Unbekannten v_1 und v_2:

$v_1 - v_2 = 2$ (1.2)
$v_1 + v_2 = 8$ (2.2).

Aus 2.2 folgt:

$v_2 = 8 - v_1$ (2.3)

v_2 in (1.2) eingesetzt führt zu:

$v_1 - (8 - v_1) = 400$ oder
$2v_1 = 10$ oder
$v_1 = 5$

v_1 eingesetzt in (2.3) führt zu:

$v_2 = 8 - v_1 = 8 - 5 = 3.$

Der schnellere Läufer läuft mit einer Geschwindigkeit von 5 m/s. Der langsamere Läufer läuft mit einer Geschwindigkeit von 3 m/s. Wie aus Abb. 6 hervorgeht, überholt der schnellere den langsameren Läufer erstmalig nach 1000 m, d.h. in der 3. Runde.

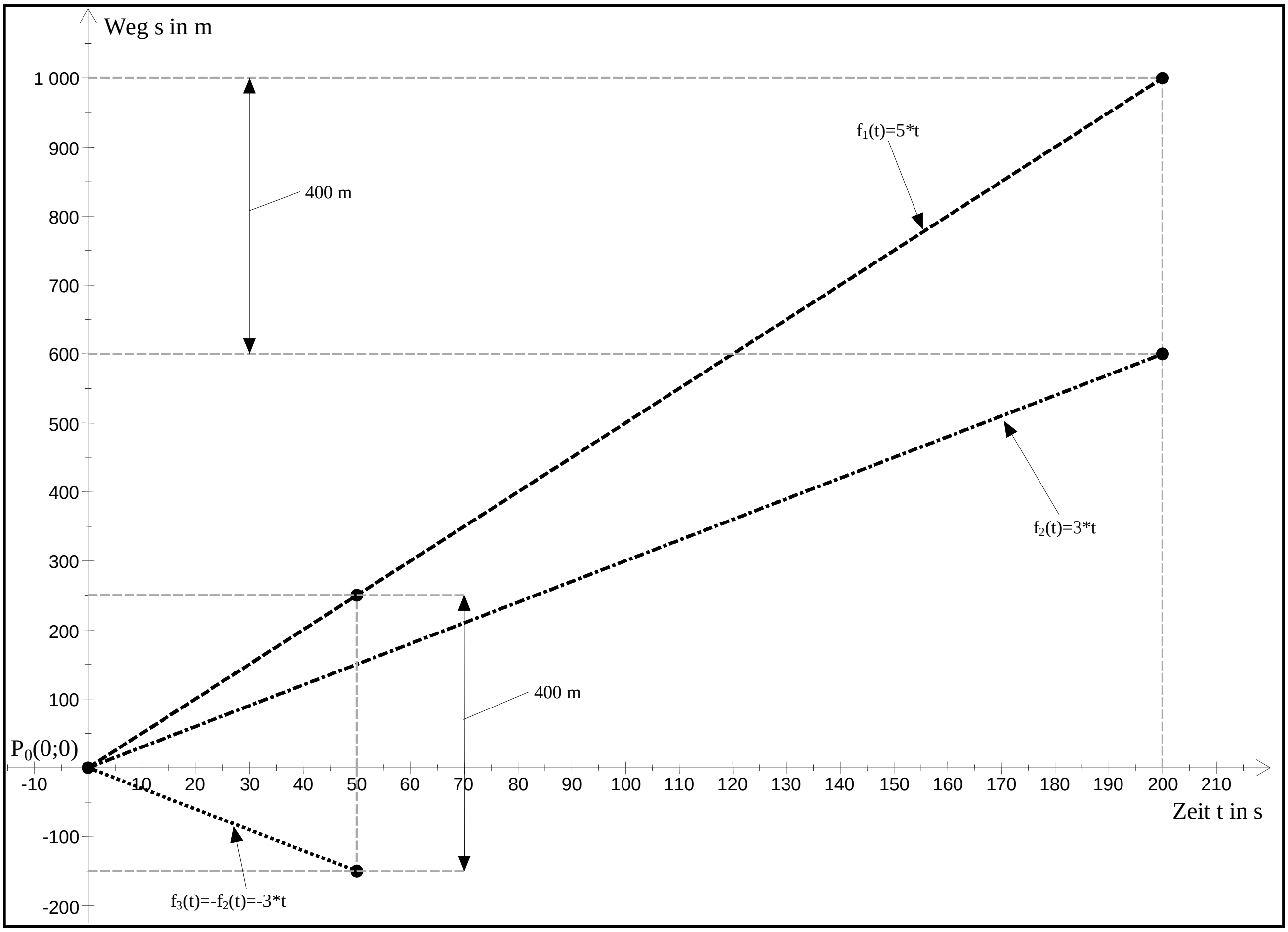


Abb. 6

Beispielaufgabe 5:

Zwei Windhunde laufen auf zwei parallelen, 350 m langen Bahnen gleichzeitig beginnend einander entgegen. Der erste Hund läuft mit einer Geschwindigkeit von 72 km/h. Wenn sich die Hunde treffen, hat der erste 25 m mehr als die halbe Länge der Bahnen zurückgelegt. Wie schnell läuft der zweite Hund? Nach wie vielen Sekunden treffen sich die Hunde?

Lösung:

Wenn der erste Hund mit konstanter Geschwindigkeit läuft, dann kann seine Bewegung mit folgender Gleichung beschrieben werden:

$f_1(t) = v_1 * t$ (1.1).

In der Aufgabe sind die Längen und Zeiten mit verschiedenen Einheiten angegeben. Weil die Hunde nur 350 m laufen, scheint es zweckmäßig, die Längenangaben in Meter und die Zeitangaben in Sekunden zu verwenden.
Weil 72 km/h gleich 72*1000/3600 m/s = 20 m/s sind ergibt sich:

$f_1(t) = 20 *t$ (1.2)

Wenn der zweite dem ersten Hund mit konstanter Geschwindigkeit entgegenläuft, dann kann seine Bewegung mit folgender Gleichung beschrieben werden:

$f_2(t) = v_2 *t + 350$ (2).

Weil der zweite Hund dem ersten Hund entgegen läuft, wird v_2 negativ sein, d.h. $f_2(t)$ ist eine fallende Gerade, die vom Punkt $P_0(0;350)$ ausgeht (siehe Abb. 7). Wenn der erste Hund beim Zusammentreffen zum Zeitpunkt t_x 25 m mehr als die halbe Länge der Bahnen zurückgelegt hat, wird er schneller als der zweite Hund sein, d.h.
$|v_2| < 20$ m/s. Zum Zeitpunkt t_x befinden sich die Hunde am gleichen Ort s_x. Es gilt:

$f_1(t_x) = f2(t_x) = s_x$.

s_x entspricht der halben Bahnlänge zuzüglich 25 m:

$s_x = 350/2 + 25 = 200$.

Aus (1.2) folgt:

$f_1(t_x) = 20 * t_x = s_x$ oder

$20 * t_x = 200$ bzw.

$t_x = 10$.

Aus (2) folgt:

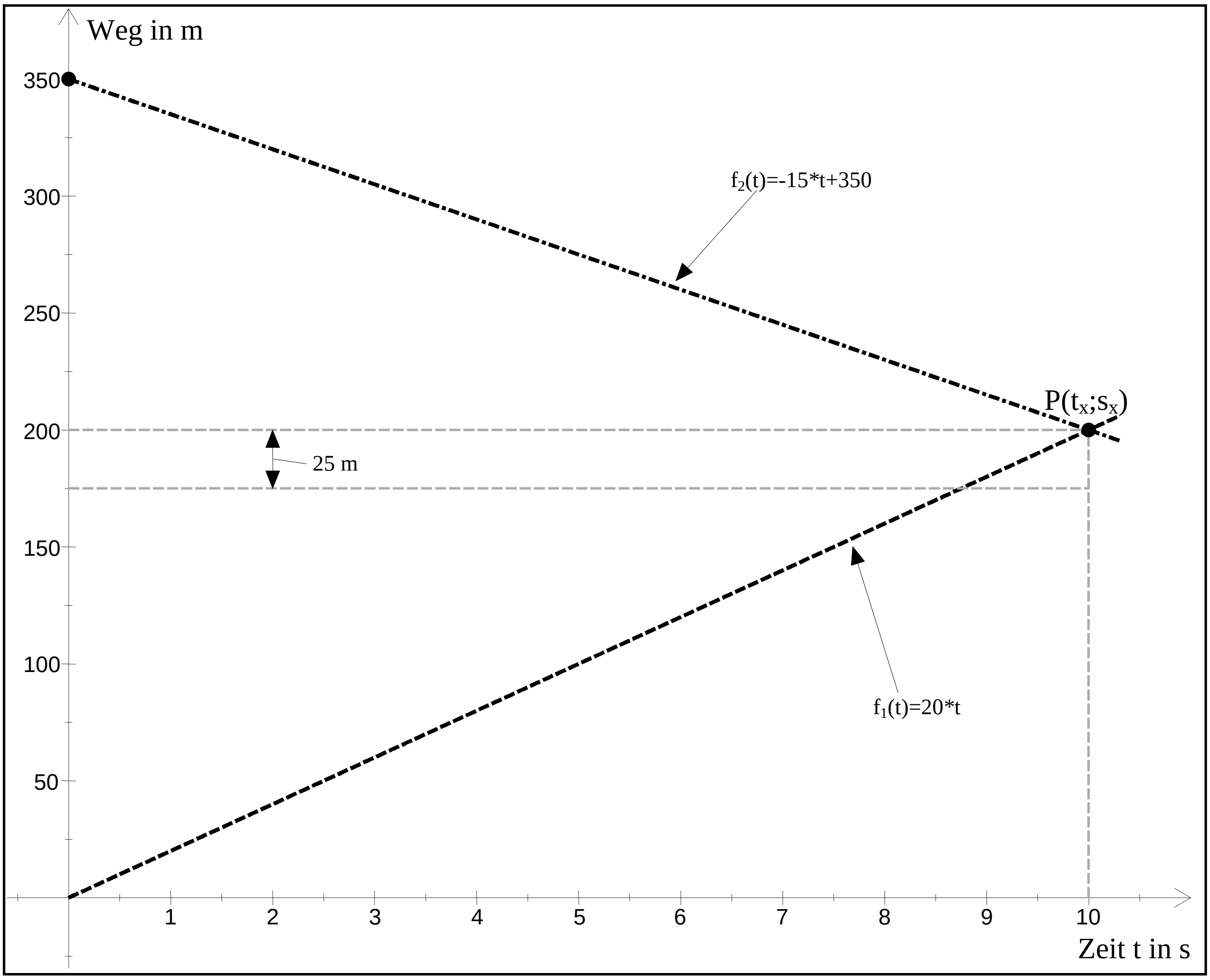
$f2(t_x) = v_2 * t_x + 350 = 200$ oder

$v_2 * 10 + 350 = 200$ bzw.

$10v_2 = -150$ bzw.

$v_2 = -15$

Der zweite Hund läuft mit einer Geschwindigkeit von 15 m/s bzw. 54 km/h.
Die Hunde begegnen sich nach 10 Sekunden.



Weg in m
350
300
250
200
150
100
50
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Zeit t in s
f2(t)=-15*t+350
f1(t)=20*t
25 m
P(tx;sx)

Abb. 7