Arbeitsblatt Mathematik: Leistungsaufgaben

In der Physik ist Leistung die pro Zeiteinheit verrichtete Arbeit. In einer Leistungsaufgabe sind ein oder mehrere Leistungserbringer genannt, die eine vorgegebene Arbeit verrichten sollen. Die Leistungserbringer, wie Personen, Pumpen, Maschinen und dgl., haben unterschiedliche Leistungsparameter. Es ist möglich, dass unterschiedliche Leistungserbringer gleichzeitig oder zeitlich versetzt bzw. gleichlang oder mit unterschiedlicher Dauer wirken.

Die von den Leistungserbringern pro Zeiteinheit geleistete Arbeit lässt sich in einem Koordinatensystem grafisch darstellen. Auf der x-Achse wird die Zeit und auf der y-Achse die Arbeit angetragen. Wenn in einer Aufgabe nicht anders angegeben, kann man davon ausgehen, dass ein Leistungserbringer, ohne zu unterbrechen, pro Zeiteinheit eine Arbeit mit konstanter Leistung verrichtet, d.h. die Arbeit wächst proportional mit der Zeit. Wenn zur Arbeit keine physikalische Einheit genannt ist, werden relative Arbeitseinheiten verwendet: volle Arbeit erbracht- entspricht 100% oder 1/1 der Arbeit. Der Verlauf der Arbeit in dem Koordinatensystem ist eine Gerade. Der Anstieg der Geraden ergibt sich aus dem Leistungsparameter des Leistungserbringers. Wenn ein Leistungserbringer zeitlich versetzt zu einem andern Leistungserbringer in Aktion tritt, dann geht mindestens eine der Geraden nicht durch den Koordinatenursprung bzw. schneidet mindestens eine der Geraden die y-Achse.

Die Begriffe „Leistungserbringer“, „Leistungsparameter“ bzw. „Arbeit“ sind in Leistungsaufgaben nicht eng im physikalischen Sinne zu verstehen.

Beispiele:

Leistungserbringer	*Leistungscharakteristik*	*Arbeit*
Zuflussrohr	Liter/Stunde	y Liter einfüllen
Bagger	Aushub pro Tag	Aushub gänzlich erledigen
Uhrzeiger	überstrichener Winkel pro Minute	Überstreichen eines Sollwinkels
Zuflusskanal, Abflusskanal	Zufluss- und Abflussrate	Wasserstand relativ
Futterspender	Futterverbrauch pro Tag	Anzahl gefütterter Tiere
Rasenmäher	Quadratmeter pro Stunde	Rasen komplett mähen

Es kann hilfreich sein, das in einer Aufgabe Gegebene in einer Skizze darzustellen.

Zu jedem Leistungserbringer kann eine Funktionsgleichung $y = f(x)$ angegeben werden. Das Gesuchte ergibt sich aus den Gegebenen, indem Schnittpunkte der Funktionen untereinander, mit den Koordinatenachsen oder mit Parallelen zu den Koordinatenachsen bestimmt werden.

Sind aus einer Aufgabenstellung die Koordinaten zweier Punkte $P_1(x_1;y_1)$ und $P_2(x_2;y_2)$ einer beliebigen Geraden $y = f(x) = m*x + b$ bekannt, dann ergibt sich der Anstieg m aus:

$m = (y_2-y_1)/(x_2-x_1)$.

Ein Schnittpunkt $P_S(0;b)$ einer beliebigen Geraden $y = f(x) = m*x + b$ mit der y-Achse errechnet sich aus der Gleichung:

$b = y_2 – m*x_2$.

Beispielaufgabe 1:

In einer chemischen Fabrik soll ein Behälter nach folgender Vorschrift vollständig mit Reaktionsflüssigkeiten gefüllt werden:

a) Öffnen einer ersten Zuflussleitung. Wenn der Behälter allein aus der ersten Leitung befüllt werden würde, wäre er nach 42 min voll.
b) 6 Minuten nach dem Öffnen der ersten wird zusätzlich eine zweite Zuflussleitung geöffnet. Die 2. Leitung wäre allein in der Lage, den Behälter in 48 min zu füllen.
c) 8 Minuten nach dem Öffnen der zweiten wird zusätzlich eine dritte Zuflussleitung geöffnet. Der Zufluss aus der 3. Leitung ist so stark, dass der Behälter allein mit der 3. Leitung in 56 Minuten gefüllt werden könnte.

Wie lange dauert es, bis der Behälter gefüllt ist?

Lösung:

Wir gehen davon aus, dass die Ausflüsse aus den Leitungen nach Abb. 1 proportional zur Zeit sind. In einem Koordinatensystem können für die drei Zuflüsse 3 Funktionen eingetragen werden:

$y = f_1(x) = m_1*x + b_1$ (1.1)
$y = f_2(x) = m_2*x + b_2$ (2.1)
$y = f_3(x) = m_3*x + b_3$ (3.1).

Es handelt sich um 3 Geraden-Gleichungen. x bezeichnet die Zeit in Minuten. y stellt die Befüllung des Behälters in Prozent dar. Demnach liegt der Wertebereich von y zwischen Null und 100%. m_1, m_2, m_3 sind die Anstiege und b_1, b_2, b_3 sind die Schnittpunkte der Geraden mit der y-Achse.

Zunächst werden die Anstiege m_1, m_2, m_3 bestimmt.

Gemäß Aufgabenstellung beginnt der Ausfluss aus Leitung 1 zum Zeitpunkt $x_1=0$ bei dem noch keine Arbeit verrichtet wurde, d.h. $y_1=0$. Nach $x_2=42$ min Zufluss aus Leitung 1 wäre der Behälter voll, d.h. $y_2=100$. Aus den Punkten $P_1(0;0)$ und $P_2(42;100)$ errechnet sich m_1 zu:

$m_1 = (100-0)/(42-0) = 100/42$.

Der Ausfluss aus der zweiten Leitung beginnt nach 6 Minuten. Es würde 48 Minuten dauern, um den Behälter zu 100% zu füllen. $f_2(x)$ enthält die Punkte $P_3(6;0)$ und $P_4(54;100)$, so dass sich m_2 ergibt:

$m_2 = (100-0)/(54-6) = 100/48$.

Aus den Punkten $P_5(6+8;0) = P_5(14;0)$ und $P_6(14+56;100) = P_6(70;100)$ errechnet sich für $f_3(x)$ m_3 zu:

$m_3 = (100-0)/(70-14) = 100/56$.

Dann werden die Schnittpunkte b_1, b_2, b_3 mit der y-Achse bestimmt.

Die Gerade $y = f_1(x) = m_1*x + b_1$ der ersten Zuflussleitung, enthält die Punkte $P_1(0;0)$ und $P_2(42;100)$, so dass sich b_1 wie folgt ergibt:

$b_1 = y_2 – m_1 * x_2 = 100 – 100/42 *42 = 0$.

$b_1 = 0$ hätte man auch sofort angeben können, weil ja die Gerade $f_1(x)$ tatsächlich im Punkt $P_1(0;0)$ beginnt.

Die Gerade $y = f_2(x) = m_2*x + b_2$ der zweiten Zuflussleitung, enthält die Punkte $P_3(6;0)$ und $P_4(54;100)$, so dass sich b_2 wie folgt ergibt:

$b_2 = y_4 – m_2 * x_4 = 100 – 100/48 *54 = 100 (1-54/48) = -100/8$.

Ein anderer Weg, um auf b_2 zu kommen, besteht darin, dass ja aufgabengemäß der Zufluss aus der 2. Leitung erst nach 6 min beginnt, d.h. zum Zeitpunkt $x_3=6$ hat der 2. Zufluss noch keinen Beitrag zum Füllen des Behälters gebracht, d.h. $y_3=0$. Der Punkt $P_3(x_3;y_3) = P_3(6;0)$ liegt aber auf $f_2(x)$:

$y_3 = m_2*x_3 + b_2$
$0 = m_2*6 + b_2$ oder $b_2 = -6m_2 = -6*100/48 = -100/8$.

Der 3. Zufluss beginnt erst zum Zeitpunkt $x_5=6+8=14$ im Punkt $P_5(14;0)$. Würde der 3. Zufluss 56 min geöffnet sein, würde der Füllstand 100% erreichen. Mit 14 min Verschiebung in Richtung der x-Achse liegt der Punkt $P_6(56+14;100)$ auf der Geraden $f_3(x)$:

$b_3 = y_6 – m_3 * x_6 = 100 – 100/56 *70 = 100 (1-70/56) = -100/4$.

Weil entsprechend $f_3(x)$ der 3. Zufluss bei $x_5=6+8=14$ noch nichts in den Behälter geliefert hat ($y_5=0$), ergibt sich alternativ b_3 analog b_2 aus:

$y_5 = m_3*x_5 + b_3$
$0 = m_3*14 + b_3$ oder $b_3 = -14m_3 = -14*100/56 = -100/4$.

Damit lauten die 3 Funktionsgleichungen:

$y = f_1(x) = (100/42)*x$ (1.2)
$y = f_2(x) = (100/48)*x–100/8$ (2.2)
$y = f_3(x) = (100/56)*x-100/4$ (3.2).

Das Füllen geschieht in drei Phasen a), b) und c), die in Abb. 2 dargestellt sind. In der ersten Phase a) von 0 bis 6 Minuten wird der Behälter nur aus Leitung 1 befüllt. Der Verlauf des Füllens folgt allein $f_1(x)$. In Phase b) wird nach 6 Minuten der Behälter zusätzlich aus dem 2. Zufluss gespeist, d.h. es läuft gleichzeitig Flüssigkeit aus den Zuflüssen 1 und 2 in den Behälter. Von der 6. bis zur 14. Minute folgt das Füllen dem Verlauf $f_4(x) = f_1(x)+f_2(x)$. Ab der 14. Minute wird noch der Zufluss 3 geöffnet. Bis der Behälter vollständig gefüllt ist, wird ab der 14 Minute aus allen 3 Zuflüssen Flüssigkeit geliefert. In der Phase c) folgt das Füllen dem Verlauf $f_5(x) = f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)$. Zu einem Zeitpunkt x_9 beträgt der Füllstand y_9 = 100%. Der Punkt $P_9(x_9;y_9)= P_9(x_9;100)$ liegt auf $f_5(x)$.

$y_9 = f_5(x_9) = (100/42)*x_9 + (100/48)*x_9 –100/8 + (100/56)*x_9 -100/4$
$100 = (100/42+100/48+100/56)*x_9 -100/8 -100/4$
$1 = (1/42+1/48+1/56)* x_9 -1/8 -1/4$
$x_9 = (1-1/8-1/4)/(1/42+1/48+1/56) = (5/8)/(21/336) = 22$

Nach 22 Minuten ist der Behälter zu 100% gefüllt.

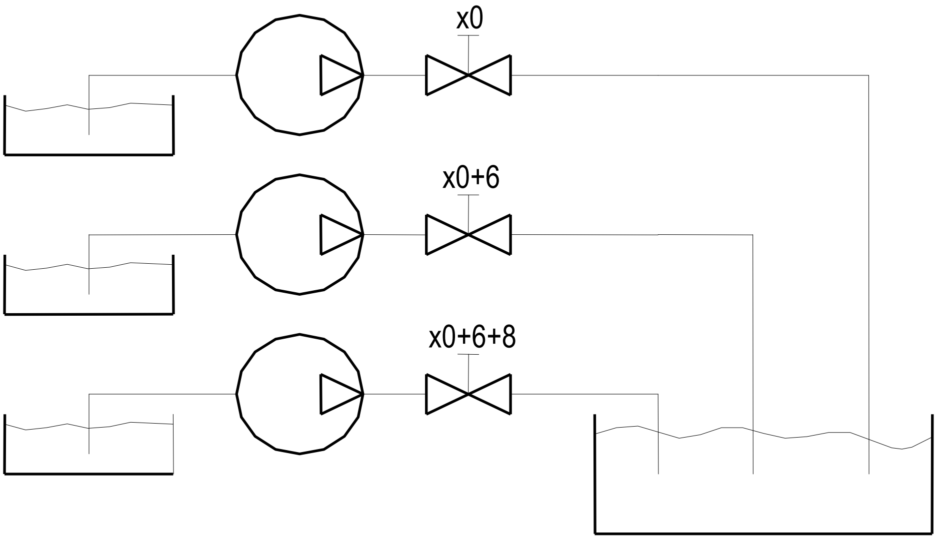

x0
x0+6
x0+6+8

Abb. 1

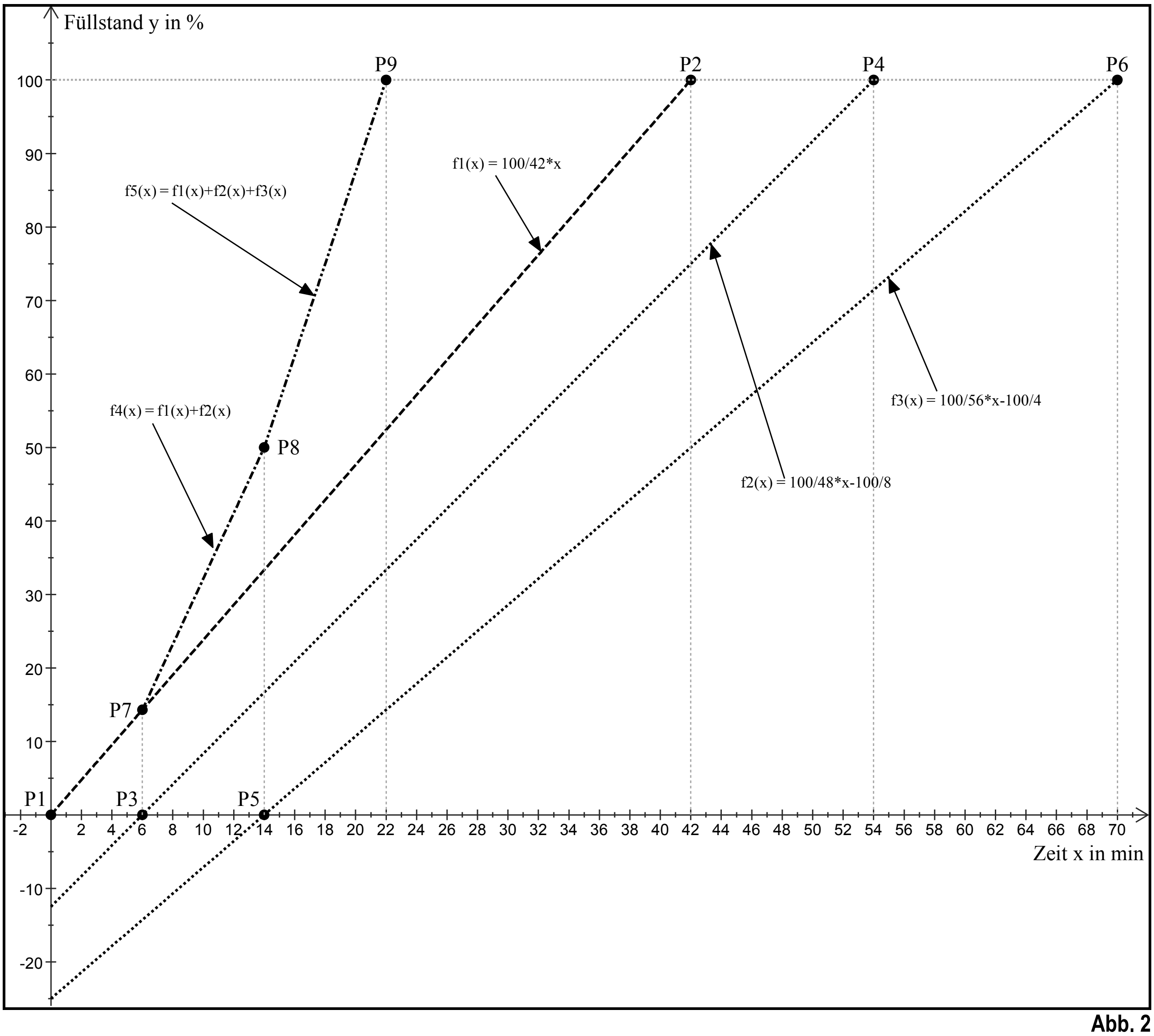

Füllstand y in %
Zeit x in min
P1
P2
P3
P4
P5
P6
P7
P8
P9
f1(x) = 100/42*x
f2(x) = 100/48*x-100/8
f3(x) = 100/56*x-100/4
f4(x) = f1(x)+f2(x)
f5(x) = f1(x)+f2(x)+f3(x)

Abb. 2

Beispielaufgabe 2:

In einer Verpackungsanlage werden Behälter aus zwei gleichzeitig geöffneten Leitungen jeweils innerhalb von 2 Sekunden vollständig mit Fruchtsaft befüllt. Wenn beim Befüllen zunächst aus der 1. Leitung nur eine Sekunde lang Fruchtsaft eingefüllt wird, dann muss anschließend aus der 2. Leitung 4 Sekunden lang Fruchtsaft nachgefüllt werden, um den Behälter vollständig zu füllen. Wie lange dauert das Befüllen, wenn nur aus der 1. bzw. nur aus der 2. Leitung Fruchtsaft eingefüllt wird?

Lösung:

Wenn die Ausflüsse aus den 2 Leitungen nach Abb. 1 proportional der Zeit sind, dann können 2 Funktionsgleichungen aufgestellt werden:

$y = f_1(x) = m_1*x + b_1$ (1.1)
$y = f_2(x) = m_2*x + b_2$ (2.1)

Es handelt sich um Geraden-Gleichungen. x bezeichnet die Zeit in Sekunden. y stellt die Befüllung eines Behälters in Prozent dar. Demnach liegt der Wertebereich von y zwischen Null und 100%. m_1, m_2 sind die Anstiege und b_1, b_2, sind die Schnittpunkte der Geraden mit der y-Achse. Wenn der Behälter nur aus der 1. oder 2. Leitung gefüllt wird, dann beginnt das Füllen zum Zeitpunkt x=0, bei dem der Füllstand noch Null ist, d.h. y=0. Bei einer Gerade durch den Nullpunkt $P_0(0;0)$ ist b= b_2 = b_2 = 0, so dass sich die Geraden-Gleichungen vereinfachen:

$y = f_1(x) = m_1*x$ (1.2)
$y = f_2(x) = m_2*x$ (2.2)

Das Füllen aus nur einer Leitung endet, wenn der Füllstand 100% beträgt. Wir nehmen an, dass ein Füllen aus der 1. bzw. 2. Leitung zum Zeitpunkt x_1 bzw. x_2 beendet ist. Damit enden $f_1(x)$ bzw. $f_2(x)$ in den Punkten $P_1(x_1;100)$ bzw. $P_2(x_2;100)$. Wenn die Koordinaten der Punkte P_1 bzw. P_2 in $f_1(x)$ bzw. $f_2(x)$ eingesetzt werden, ergeben sich folgende Gleichungen:

$100 = m_1*x_1$ (1.3)
$100 = m_2*x_2$ (2.3)

Daraus ergeben sich die gesuchten Zeitdauern x_1 bzw. x_2:

$x_1 = 100/m_1$ (1.4)
$x_2 = 100/m_2$. (2.4)

Zur Berechnung von x_1 bzw. x_2 fehlen noch die Werte vom m_1 bzw. m_2.

Die Aufgabenstellung enthält die Angabe, dass ein gleichzeitiges Füllen aus beiden Leitungen 2 Sekunden dauert. Weil beide Leitungen Fruchtsaft liefern, ergibt sich eine Füllcharakteristik in Form einer additiven Überlagerung der Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$:

$f_3(x) = f_1(x) + f_2(x) = m_1*x + m_2*x = (m_1+m_2)x$. (3.1)

Die Funktion $f_3(x)$ beginnt im Punkt $P_0(0;0)$ und endet im Punkt $P_3(2;100)$. Mit den Koordinaten von P_3 ergibt sich aus (3.1):

$100 = (m_1+m_2) * 2$ oder:
$2m_1 + 2m_2 = 100$ (3.2).

Die Aufgabenstellung enthält weiterhin die Angabe, dass nach einer Sekunde Füllen aus der 1. Leitung zusätzlich 4 Sekunden Füllen aus der 2. Leitung erforderlich sind, um den Behälter 100% zu füllen. Nach einer Sekunde hat der Füllstand nach der Füllgeraden $f_1(x)$ die Höhe y_4 erreicht, d.h. die Funktion $f_1(x)$ endet im Punkt $P_4(1;y_4)$. Ab dem Punkt P_4 folgt der Füllstand 4 Sekunden einer Geraden $f_4(x)$, die den Anstieg m_2 der 2. Leitung hat und endet im Punkt $P_5(1+4;100)$ bzw. $P_5(5;100)$. Der Verlauf von $f_4(x)$ wird durch folgende Gerade beschrieben:

$y = f_4(x) = m_2*x + b_4$.

b_4 ist der Schnittpunkt von $f_4(x)$ mit der y-Achse und kann errechnet werden, wenn $f_4(x)$ im Punkt $P_5(5;100)$ betrachtet wird:

$100 = m_2*5 + b_4$ bzw. $b_4 = -5m_2 + 100$.

Mit diesem b_4 lautet $f_4(x)$:

$y = f_4(x) = m_2*x -5m_2 + 100$.

Weil $f_1(x)$ im Punkt $P_4(1;y_4)$ endet und $f_4(x)$ im selben Punkt $P_4(1;y_4)$ beginnt, gilt für diesen Punkt $P_4(1;y_4)$: $f_1(1) = f_4(1)$

$f_1(1) = m_1*1 =$
$f_4(1) = m_2 *1 -5m_2 + 100$ bzw. nach Gleichsetzen und Umstellen:
$f_1(1) = f_4(1)$:
$m_1*1 = m_2 *1 -5m_2 + 100$ (4.1)

$m_1 + 4m_2 = 100$ (4.2)
$2m_1 + 2m_2 = 100$ (3.2).

(4.2) und (3.2) sind 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten, deren Lösungen lauten:

$m_1 = 200/6$
$m_2 = 100/6$.

In (1.4) und (2.4) eingesetzt ergeben sich:

$x_1 = 100/m_1 = 100/ (200/6) = 3$ (1.4)
$x_2 = 100/m_2 = 100/ (100/6) = 6$ (2.4)

Das Füllen nur aus der 1. Leitung dauert 3 s.
Das Füllen nur aus der 2. Leitung dauert 6 s.

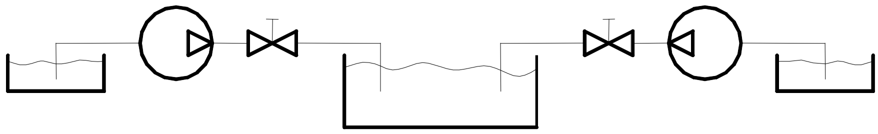


Abb. 3

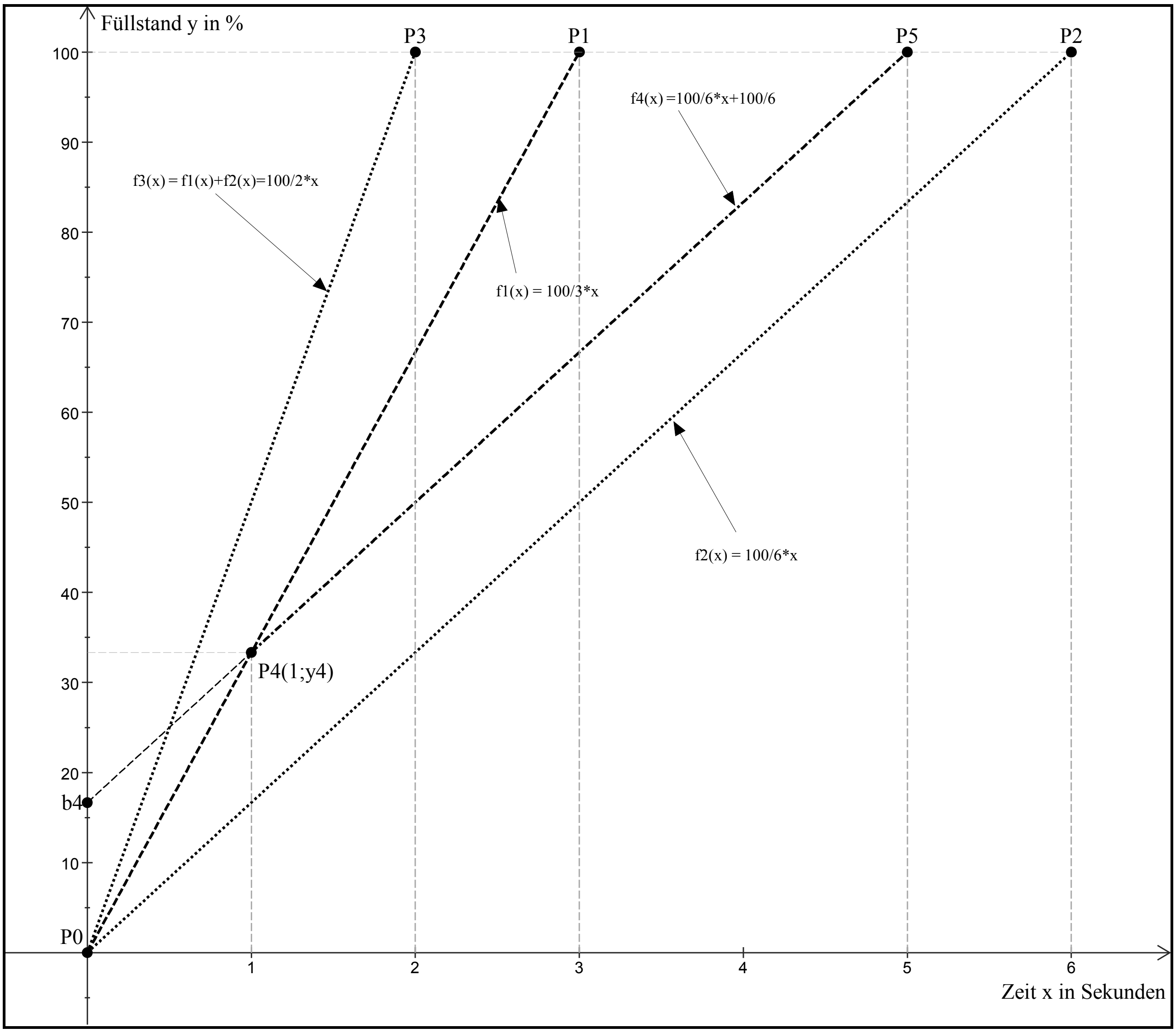

Füllstand y in %
P3
P1
P5
P2
f4(x) =100/6*x+100/6
f3(x) = f1(x)+f2(x)=100/2*x
f1(x) = 100/3*x
f2(x) = 100/6*x
P4(1;y4)
b4
P0
Zeit x in Sekunden
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
1
2
3
4
5
6

Abb. 4

Beispielaufgabe 3:

Ein Zementsilo wird von oben aus einem Rohr befüllt. Von unten kann Zement mittels eines Schiebers entnommen werden. Ist der Schieber 20 Minuten geöffnet, wird eine Zementmenge entnommen, die in 40 Minuten durch das Rohr wieder aufgefüllt werden kann. Ist der Schieber 40 Minuten geöffnet und wird anschließend über das Rohr 30 Minuten Zement nachgefüllt, dann enthält das Silo die halbe Menge Zement wie vor dem Öffnen des Schiebers.
a) Wie lange dauert es, ohne nachzufüllen, das volle Silo zu leeren?
b) Wie lange dauert das Befüllen des leeren Silos bei geschlossenem Schieber?

Lösung:

Bei geöffnetem Schieber wird entsprechend einer linearen Funktion $f_1(x)$ pro Zeiteinheit eine konstante Menge Zement entnommen. $f_1(x)$ ist eine fallende Gerade mit einem Anstieg $m_1<0$. Beim Füllen des Silos über das Rohr kommt entsprechend $f_2(x)$ pro Zeiteinheit eine konstante Menge Zement in das Silo.

$y = f_1(x) = m_1*x + b_1$ (1.1)
$y = f_2(x) = m_2*x + b_2$ (2.1)

Beim Entleeren des vollen Silos fällt $f_1(x)$ vom Punkt $P_1(0;100)$ auf den Punkt $P_2(x_1;0)$. $f_1(x)$ schneidet im Punkt $P_1(0;100)$ die y-Achse, d.h. $b_1=100$. Der Anstieg m_1 ergibt sich aus P1 und P2:

$m_1 = (y_2-y_1)/(x_2-x_1)= (0-100)/(x_1-0) = -100/x_1$.

Beim Füllen des leeren Silos steigt $f_2(x)$ vom Punkt $P_3(0;0)$ auf den Punkt $P_4(x_2;0)$. $f_1(x)$ schneidet im Punkt $P_3(0;0)$ die y-Achse, d.h. $b_2=0$. Der Anstieg m_2 ergibt sich aus P3 und P4:

$m_2 = (y_4-y_3)/(x_4-x_3)= (100-0)/(x_2-0) = 100/x_2$.

Damit lauten die Funktionen:

$y = f_1(x) = (-100/x_1)*x + 100$ (1.2)
$y = f_2(x) = (100/x_2)*x$ (2.2)

x_1 und x_2 sind die gesuchten Größen.

Wenn gemäß Aufgabenstellung der Schieber 20 min geöffnet wird und danach 40 min über das Rohr aufgefüllt wird, dann sinkt der Füllstand von 100% bis auf einen Wert y_5 nach der Funktion $f_1(x)$ und steigt von y_5 wieder auf 100% nach einer Funktion $f_3(x)$, welche die Steigung m_2 der Funktion $f_2(x)$ aufweist. $f_3(x)$ hat den Verlauf:

$y = f_3(x) = (100/x_2)*x + b_3$.

b_3 kann aus den Punkten $P_5(20;y_5)$ und $P_6(20+40;100)=P_6(60;100)$ errechnet werden:

$b_3 = y_6 – m_2*x_6 = 100-(100/x_2)*60$

$f_3(x)$ lautet somit:

$y = f_3(x) = (100/x_2)*x + 100-(100/x_2)*60$.

Für $x=20$ ist $f_1(20)=f_3(20)=y_5$:

$(-100/x_1)*20+100=(100/x_2)*20+100-(100/x_2)*60$, oder

$(-2000/x_1)+(4000/x_2)=0$, oder

$(-2000*x_2+4000*x1)/x_1*x2=0$, oder

$-2000x_2+4000x_1=0$, oder

$x_1=(1/2)x_2 = 0{,}5x2$.

Wenn gemäß Aufgabenstellung der Schieber 40 min geöffnet wird und danach 30 min aufgefüllt wird, dann sinkt der Füllstand von 100% bis auf einen Wert y_7 nach der Funktion $f_1(x)$ und steigt von y_7 auf 50% nach einer Funktion $f_4(x)$, welche die Steigung m_2 der Funktion $f_2(x)$ aufweist. $f_4(x)$ hat den Verlauf:

$y = f_4(x) = (100/x_2)*x + b_4$.

b_4 kann aus dem Punkt $P_8(40+30;50)=P_8(70;50)$ und m_2 errechnet werden:

$b_4 = y_8 - m_2*x_8 = 50-(100/x_2)*70$

$f_4(x)$ lautet somit:

$y = f_4(x) = (100/x_2)*x + 50-(100/x_2)*70$.

Für $x=40$ ist $f_1(40)=f_4(40)=y_7$:

$(-100/x_1)*40+100 = (100/x_2)*40 + 50-(100/x_2)*70$, oder

$(-4000/x_1) + (3000/x_2) = -50$, oder

$(-4000x_2+3000x_1)/x_1x_2 = -50$, oder

$-4000x_2+3000x_1 = -50x_1x_2$.

Aus $x_1 = 0{,}5x_2$ folgt:

$-4000x_2 + 3000*0{,}5*x_2 = -50*0{,}5*x_2*x_2$

Nach Division durch x_2:

$-2500 = (-25)x_2$, oder

$x_2 = 100$ und

$x_1 = (0{,}5)*x_2 = (0{,}5)*100 = 50$.

Das volle Silo wäre nach 50 min entleert. Das Befüllen des leeren Silos dauert 100 min.

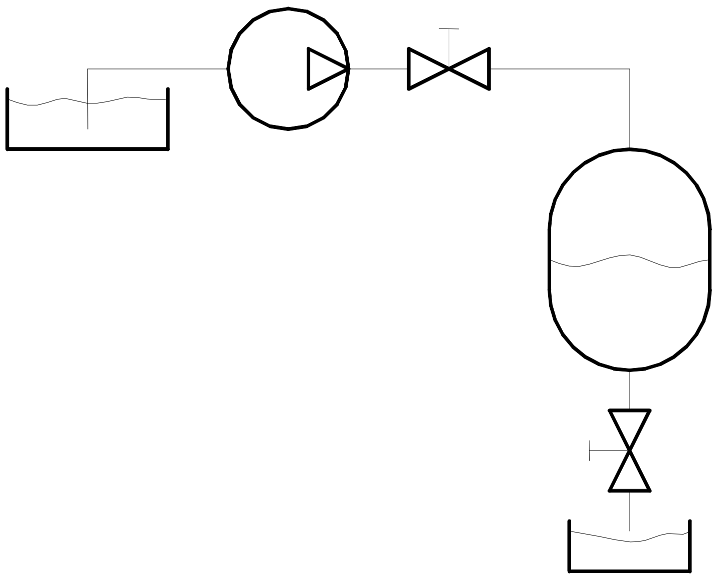


Abb. 5

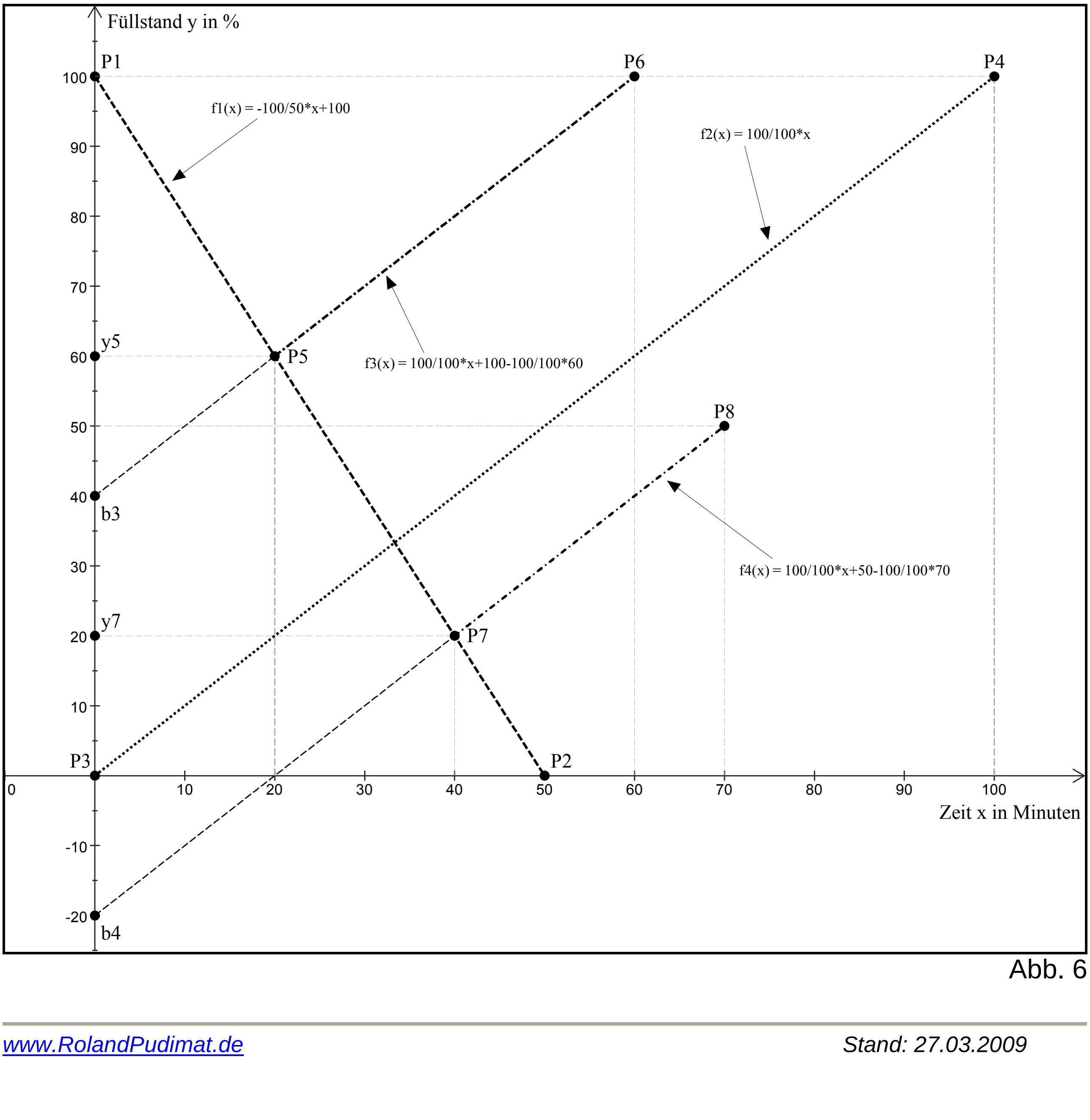

Füllstand y in %
P1
P6
P4
f1(x) = -100/50*x+100
f2(x) = 100/100*x
f3(x) = 100/100*x+100-100/100*60
f4(x) = 100/100*x+50-100/100*70
y5
P5
P8
b3
y7
P7
P3
P2
b4
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
-10
-20
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
Zeit x in Minuten

Abb. 6

Beispielaufgabe 4:

Ein Bauer aus dem Odenwald ist Fußballfan und will für 10 Tage nach Südafrika zur Fußballweltmeisterschaft fliegen. Während seiner Abwesenheit sollen seine Schafe und Ziegen mittels eines automatischen Futterspenders gefüttert werden. Der Vorrat im Futterspender würde ausreichen, um 160 Schafe und 120 Ziegen oder 100 Schafe und 150 Ziegen einen Tag lang zu füttern.

a) Würde der Vorrat mindestens 10 Tage reichen, wenn zur Weltmeisterschaft der Bauer noch 10 Schafe und 15 Ziegen zu versorgen hätte?
b) Wann wäre der Vorrat beim Füttern von 40 Schafen und 30 Ziegen aufgebraucht?
c) Wie viele Tage reicht der Vorrat für 80 Schafe?
d) Wie viele Tage reicht der Vorrat für 25 Ziegen?

Lösung:

Wir können annehmen, dass jeweils ein Schaf bzw. eine Ziege pro Tag jeweils die gleiche Menge fressen. Der gesamte Vorrat (100%) würde für ein Schaf x_1 und für eine Ziege x_2 Tage reichen. Das Fressverhalten $f_1(x)$ bzw. $f_2(x)$ eines Schafes bzw. einer Ziege kann mit folgenden Funktionen beschrieben werden, die in Abb. 7 dargestellt sind:

$$y = f_1(x) = m_1*x + b_1 \quad (1.1)$$
$$y = f_2(x) = m_2*x + b_2 \quad (2.1)$$

Das Schaf beginnt zum Zeitpunkt $P_1(0;0)$ zu fressen. Zum Zeitpunkt x1 hätte das Schaf im Punkt $P_2(x_1;100)$ 100% des Futters verbraucht. $f_1(x)$ schneidet im Punkt $P_1(0;0)$ die y-Achse, d.h. $b_1=100$. Der Anstieg m_1 ergibt sich aus P1 und P2:

$$m_1 = (y_2-y_1)/(x_2-x_1)= (100-0)/(x_1-0) = 100/x_1.$$

Die Ziege beginnt zum Zeitpunkt $P_1(0;0)$ zu fressen. Zum Zeitpunkt x2 hätte die Ziege im Punkt $P_3(x_2;100)$ 100% des Futters verbraucht. $f_2(x)$ schneidet im Punkt $P_1(0;0)$ die y-Achse, d.h. $b_2=0$. Der Anstieg m_1 ergibt sich aus P1 und P3:

$$m_2 = (y_3-y_1)/(x_3-x_1)= (100-0)/(x_2-0) = 100/x_2.$$

Damit lauten die Funktionen:

$$y = f_1(x) = (100/x_1)*x \quad (1.2)$$
$$y = f_2(x) = (100/x_2)*x \quad (2.2)$$

Ein Schaf bzw. eine Ziege würden an einem Tag die Mengen $f_1(1)$ bzw. $f_2(1)$ fressen:

$$f_1(1) = 100/x_1$$
$$f_2(1) = 100/x_2.$$

m Schafe bzw. n Ziegen würden an einem Tag das m-fache bzw. n-fache fressen:

$$m * f_1(1) = m* 100/x_1$$
$$n * f_2(1) = n* 100/x_2.$$

Wenn m Schafe und n Ziegen gleichzeitig fressen, dann addieren sich die täglichen Fressleistungen der Schafe und der Ziegen:

$$f_3(1) = m * f_1(1) + n * f_2(1) = m* 100/x_1 + n* 100/x_2$$

Gemäß Aufgabenstellung können 160 Schafe und 120 Ziegen oder 100 Schafe und 150 Ziegen den Vorrat an einem Tag zu 100% auffressen, d.h. $f_3(1) = 100$. Daraus ergeben sich folgenden Gleichungen:

$160*100/x_1 + 120*100/x_2 = 100$ (3.1)
$100*100/x_1 + 150*100/x_2 = 100$ (4.1).

Das sind 2 Gleichungen mit den 2 Unbekannten x_1, x_2. Zum Lösen der Gleichungen formen wir die Gleichungen wie folgt um:

(3.1) dividiert durch 100:

$160/x_1 + 120/x_2 = 1$ (3.2)

(3.2) auf einen Nenner gebracht:

$(160x_2 + 120x_1)/x_1*x_2 = 1$ (3.3)

(3.3) multipliziert mit x_1*x_2:

$120x_1 + 160x_2 = x_1*x_2$ (3.4)

(3.4) nach x1 aufgelöst:

$x_1 = 160x_2/(x_2-120)$ (3.5)

(4.1) dividiert durch 100:

$100/x_1 + 150/x_2 = 1$ (4.2)

(4.2) auf einen Nenner gebracht:

$(100x_2 + 150x_1)/x_1*x_2 = 1$ (4.3)

(3.3) multipliziert mit x_1*x_2:

$150x_1 + 100x_2 = x_1*x_2$ (4.4)

Von (4.4) durch Subtraktion von x_1*x_2 die Unbekannten auf eine Seite gebracht:

$150x_1 + 100x_2 – x_1*x_2 = 0$ (4.4)

Einsetzen von x_1 aus (3.5) in (4.4):

$150*160x_2/(x_2-120) + 100x_2 – [160x_2/(x_2-120)]*x_2 = 0$ (5.1)

(5.1) dividiert durch x_2:

$150*160/(x_2-120) + 100 – 160x_2/(x_2-120) = 0$ (5.2)

(5.2) multipliziert mit (x_2-120):

$150*160 + 100(x_2-120) – 160x_2 = 0$ (5.3)

(5.2) nach x_2 aufgelöst:

$x_2 = 200$.

Aus (3.5) folgt nach Einsetzen von $x_2 = 200$:

$x_1 = 160x_2/(x_2-120) = 160*200/(200-120) = 400$.

a) Wenn 10 Schafe und 15 Ziegen gleichzeitig fressen, dann beschreibt folgende Funktion den Futterverbrauch:

$f_4(x) = 10 * f_1(x) + 15 * f_2(x) = 10 * 100/400 * x + 15 * 100/200 * x$.

Gesucht ist der x-Wert, wo $f_4(x) = 100$ ist:

$10 * 100/400 * x + 15 * 100/200 * x = 100$

Nach Division durch 100:

$10/400 *x + 15/200 *x = 1$, woraus sich

$x=10$ ergibt.

Der Futtervorrat für 10 Schafe und 15 Ziegen würde genau 10 Tage reichen.

b) Analog a) steigt der Futterverbrauch linear nach:

$f_5(x) = 40 * f_1(x) + 30 * f_2(x) = 40 * 100/400 * x + 30 * 100/200 * x$.

Gesucht ist der x-Wert, wo $f_5(x) = 100$ ist:

$40 * 100/400 * x + 30 * 100/200 * x = 100$

Nach Division durch 100:

$40/400 *x + 30/200 *x = 1$, woraus sich

$x=4$ ergibt.

Der Futtervorrat würde für 40 Schafe und 30 Ziegen 4 Tage reichen.

c) Wenn ein Schaf entsprechend der Funktion $f_1(x)$ frisst, dann fressen 80 Schafe 80mal so viel:

$f_6(x) = 80 * f_1(x) = 80 * 100/x_1 *x = 80 * 100/400 *x$.

gesucht ist x für $f_6(x) = 100$:

$80 * 100/400 *x = 100$, woraus sich

$x = 5$ ergibt.

Für 80 Schafe würde das Futter 5 Tage reichen.

d) Wenn eine Ziege entsprechend der Funktion $f_2(x)$ frisst, dann fressen 25 Schafe 25mal so viel:

$f_7(x) = 25 * f_2(x) = 25 * 100/x_2 *x = 25 * 100/200 *x$.

Gesucht ist x für $f_7(x) = 100$:

$25 * 100/200 *x = 100$, woraus sich

$x = 8$ ergibt.

Für 25 Ziegen reicht das Futter 8 Tage.

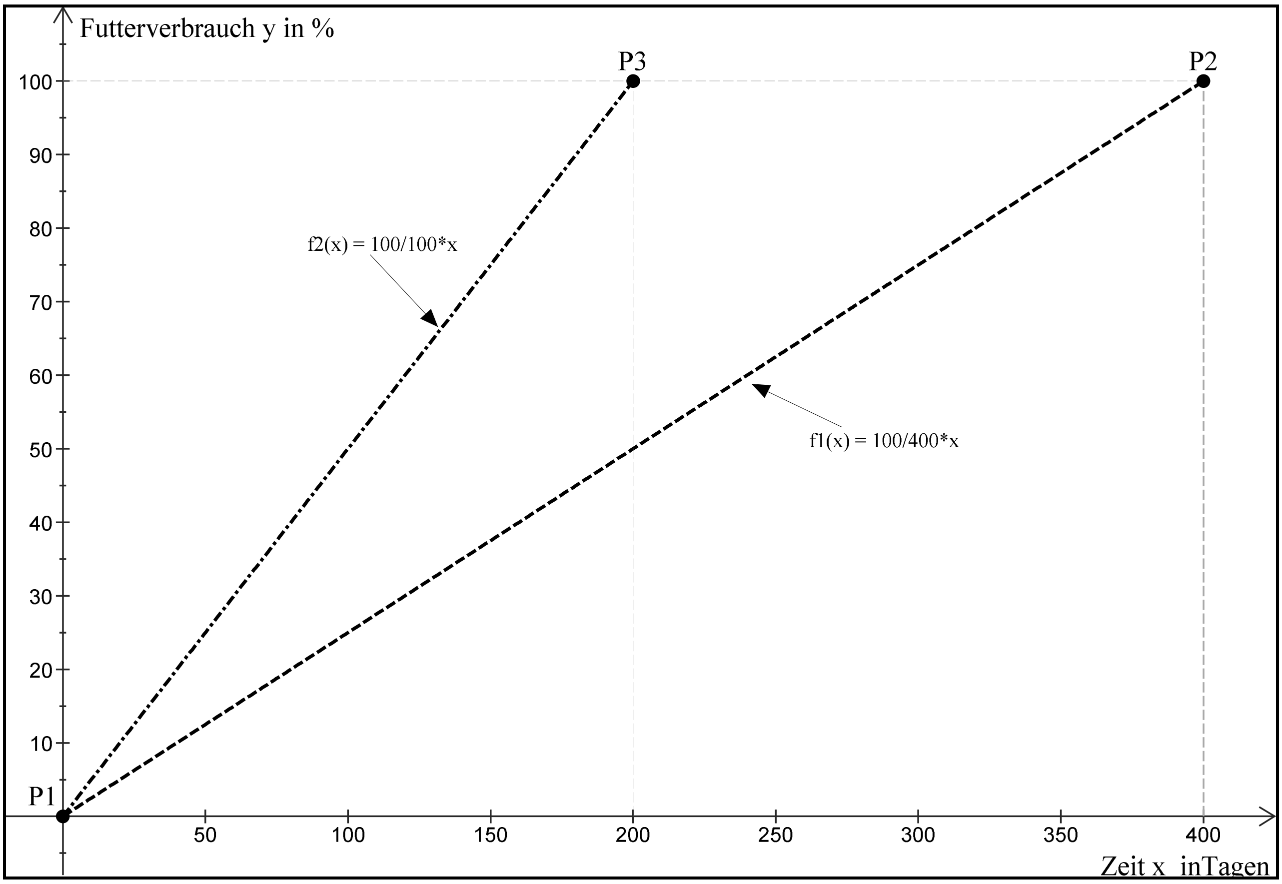

Futterverbrauch y in %
P3
P2
P1
f2(x) = 100/100*x
f1(x) = 100/400*x
Zeit x inTagen

Abb. 7

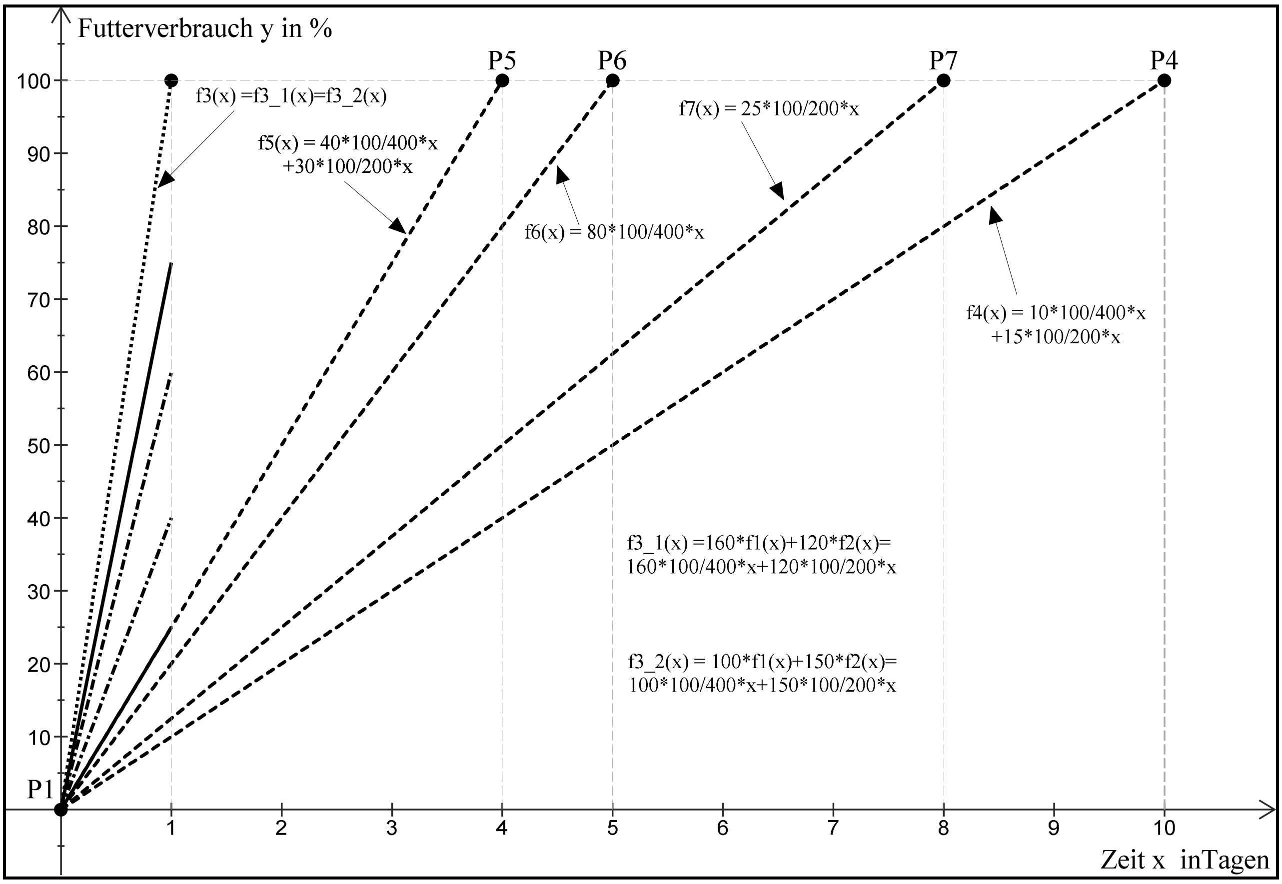

Futterverbrauch y in %
P5
P6
P7
P4
P1
f3(x) =f3_1(x)=f3_2(x)
f5(x) = 40*100/400*x
+30*100/200*x
f6(x) = 80*100/400*x
f7(x) = 25*100/200*x
f4(x) = 10*100/400*x
+15*100/200*x
f3_1(x) =160*f1(x)+120*f2(x)=
160*100/400*x+120*100/200*x
f3_2(x) = 100*f1(x)+150*f2(x)=
100*100/400*x+150*100/200*x
Zeit x inTagen

Abb. 8

Beispielaufgabe 5:

Während einer Hungerperiode verbrauchten Angehörige eines Stammes einen zuvor angelegten Maisvorrat. Die Stammesführer bekamen täglich eine größere Maisration als die sonstigen Stammesangehörigen. Für 4 Stammesführer und 36 sonstige Stammesangehörige reichte der Vorrat 40 Tage. Hätte ein Stammesführer genauso viel wie ein sonstiges Stammesmitglied erhalten, so hätte der Vorrat 50 Tage gereicht. Welchen prozentualen Anteil am Vorrat erhielt ein Stammesführer, welchen ein sonstiger Stammesangehöriger?

Lösung:

Über die Zeit x aufgetragen konsumieren ein Stammesführer und ein Nichtstammesführer linear nach den Funktionen:

f1(x) = m1*x
f2(x) = m2*x.

Weil ein Führer mehr bekommt als ein Nichtführer ist m1 > m2.

4 Führer essen die 4-fache Maismenge genau eines Führers:

4*f1(x) = 4* m1*x.

36 Nichtführer essen die 36-fache Menge genau eines Nichtführers:

36* f2(x) = 36 * m2 * x.

Nach 40 Tagen sind 100% des Vorrats von den 4 Führern und den 36 Nichtführern aufgegessen:

4 * f1(40) + 36 * f2(40) = 100 oder:
4 * m1 * 40 + 36* m2 * 40 = 100 (1.1)

Bekommt ein Führer die gleiche Tagesration wie ein Nichtführer, ist m1 = m2. Der 100% Vorrat würde von den 4 Führern und 36 Nichtführer aufgegessen und 50 Tage reichen:

4* m1 * 50 + 36 * m2 * 50 = 100 (2)

Wenn m1=m2 gesetzt wird:

4* m2 * 50 + 36 * m2 * 50 = 100, woraus sich m2 ergibt:

m2 = 1/20.

Dieses m2 in (1.1) eingesetzt führt zu:

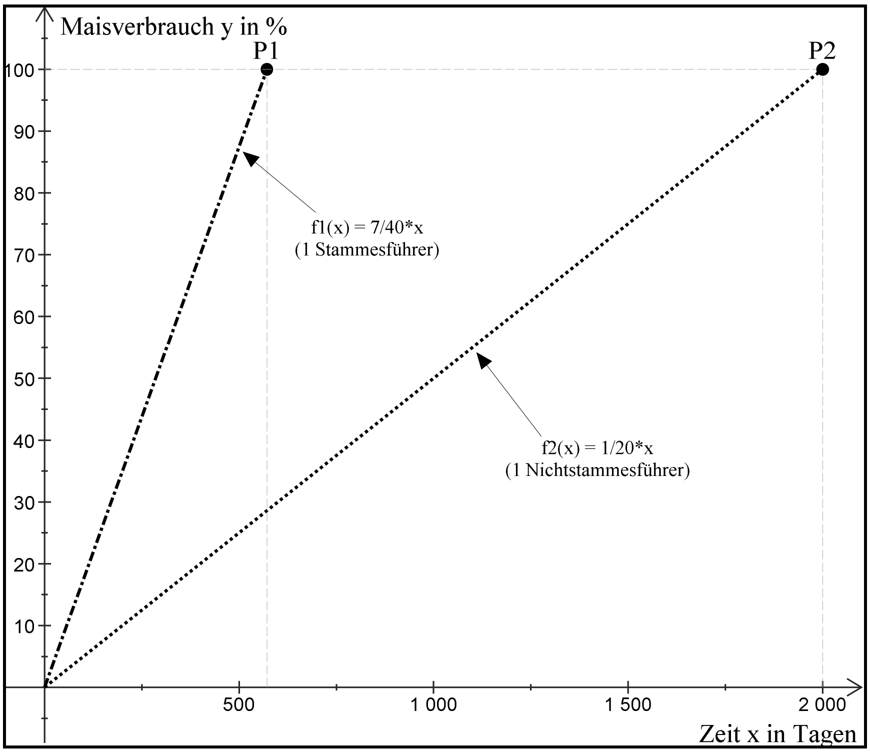
4* m1 * 40 + 36* 1/20 * 40 = 100 (1.2)

Aus (1.2) ergibt sich:

m1 = 7/40.

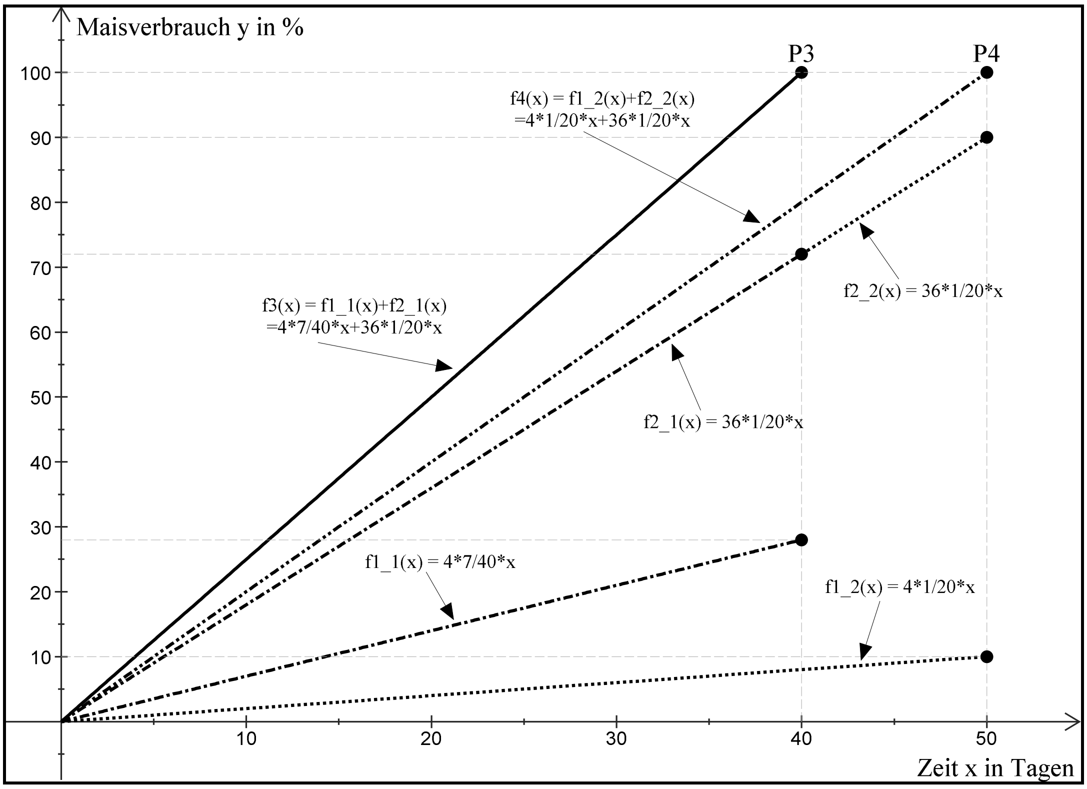
Ein Stammesführer konsumiert in 40 Tagen:
f1(40) = m1 * 40 = 7/40 * 40 = 7
Ein Nichtstammesführer konsumiert in 40 Tagen:
f2(40) = m2 * 40 = 1/20 * 40 = 2

Ein Stammesführer erhielt 7% und ein Nichtstammesführer 2% des Vorrates.



Maisverbrauch y in %
P1
P2
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
f1(x) = 7/40*x
(1 Stammesführer)
f2(x) = 1/20*x
(1 Nichtstammesführer)
500
1 000
1 500
2 000
Zeit x in Tagen

Abb. 9



Maisverbrauch y in %
P3
P4
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
f4(x) = f1_2(x)+f2_2(x)
=4*1/20*x+36*1/20*x
f3(x) = f1_1(x)+f2_1(x)
=4*7/40*x+36*1/20*x
f2_2(x) = 36*1/20*x
f2_1(x) = 36*1/20*x
f1_1(x) = 4*7/40*x
f1_2(x) = 4*1/20*x
10
20
30
40
50
Zeit x in Tagen

Abb. 10

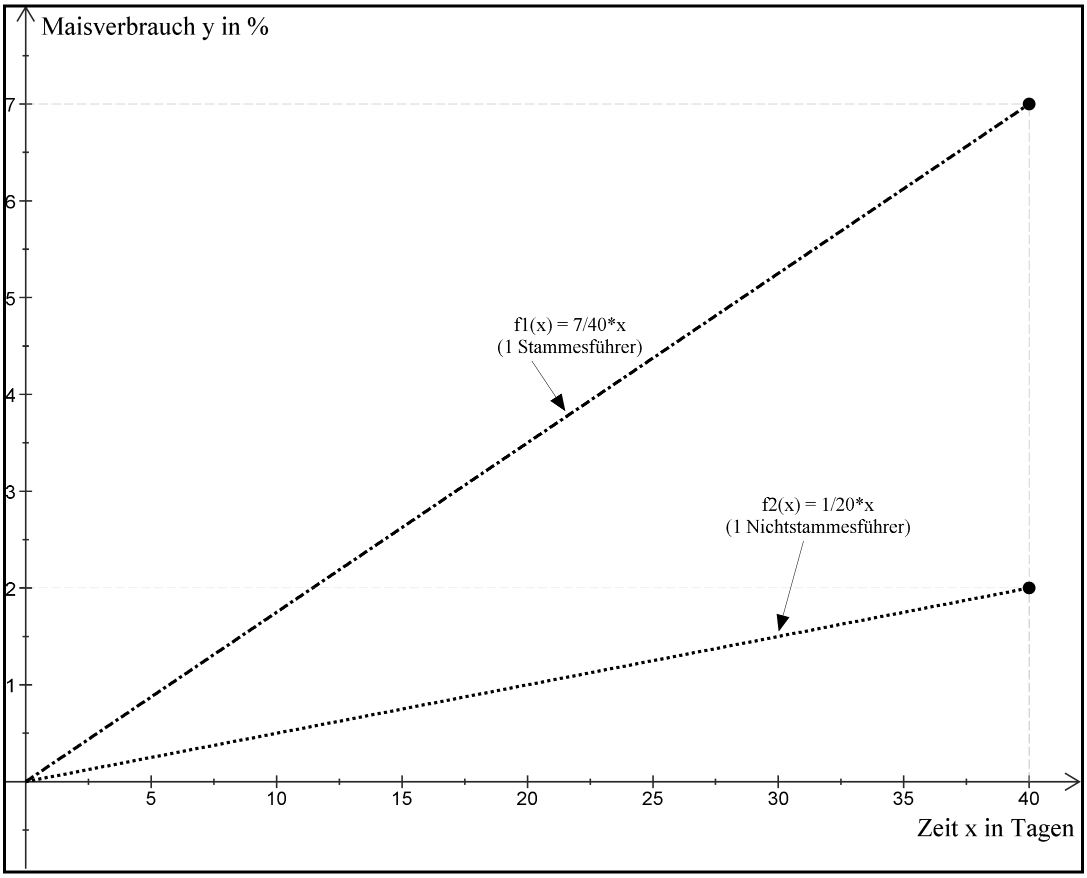

Maisverbrauch y in %
7
6
5
4
3
2
1
5
10
15
20
25
30
35
40
Zeit x in Tagen
f1(x) = 7/40*x
(1 Stammesführer)
f2(x) = 1/20*x
(1 Nichtstammesführer)

Abb. 12